

$$\boxed{1} \quad w + \frac{1}{w} = x + yi \quad \dots\dots ①$$

(1)  $w = R(\cos \theta + i \sin \theta) (0 \leq \theta < 2\pi)$  とおけて、①に代入すると、

$$\begin{aligned} x + yi &= R(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{R(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= R(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{R}(\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned}$$

$x, y, R, \theta$  は実数より、

$$x = \left(R + \frac{1}{R}\right) \cos \theta, \quad y = \left(R - \frac{1}{R}\right) \sin \theta \quad \dots\dots ②$$

$R > 1$  より、

$$R + \frac{1}{R} > R - \frac{1}{R} > 0 \quad \dots\dots ③$$

②、③と  $0 \leq \theta < 2\pi$  より、点  $(x, y)$  の軌跡は、

$$\text{楕円: } \frac{x^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$


---

(2)  $w = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) (r > 0)$  とおけて、②と同様にして、

$$x = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \alpha \quad \dots\dots ④, \quad y = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \alpha \quad \dots\dots ⑤$$

④、⑤より、 $r$  を消去すると、

$$\left(\frac{x}{\cos \alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sin \alpha}\right)^2 = 4$$

すなわち、

$$\frac{x^2}{(2 \cos \alpha)^2} - \frac{y^2}{(2 \sin \alpha)^2} = 1 \quad \dots\dots ⑥$$

次に  $rt$  平面上で、

$$t = r + \frac{1}{r} \text{ と } t = r - \frac{1}{r} \quad (r > 0)$$

のグラフは右図である。

よって、④、⑤より、 $x, y$  を取り得る値の範囲は、

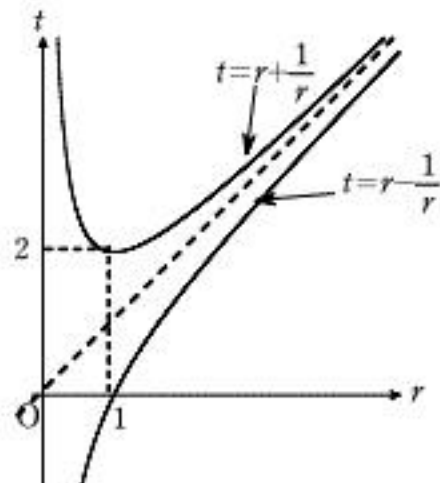
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  より、

$$x \geq 2 \cos \alpha, \quad y \text{ は全実数} \quad \dots\dots ⑦$$

⑥、⑦より、点  $(x, y)$  の軌跡は、

$$\text{双曲線: } \frac{x^2}{(2 \cos \alpha)^2} - \frac{y^2}{(2 \sin \alpha)^2} = 1 \text{ の } x > 0 \text{ の部分} \quad \dots\dots (\text{答})$$


---



(1)  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とする.

区間(0, 1)内の実数  $s$ ,  $t$  および  $x$ ,  $y$  を用いて,

$$\overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OA} = s\vec{a}, \overrightarrow{OG} = t\overrightarrow{OC} = t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OE} = (1-x)\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} = (1-x)\vec{a} + x\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OF} = (1-y)\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC} = (1-y)\vec{b} + y\vec{c}$$

と表すことができ,

$$\overrightarrow{DG} = t\vec{c} - s\vec{a}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= (1-y)\vec{b} + y\vec{c} - (1-x)\vec{a} - x\vec{b} \\ &= -(1-x)\vec{a} + (1-x-y)\vec{b} + y\vec{c} \end{aligned}$$

よって,  $\overrightarrow{DG} \parallel \overrightarrow{EF}$  つまり,  $k\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EF}$  ( $k$  は 0 でない実数)となるための条件は,  
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が 1 次独立であるから,

$$\begin{cases} -ks = -(1-x) & \dots\dots ① \\ 0 = 1-x-y & \dots\dots ② \\ kt = y & \dots\dots ③ \end{cases}$$

②より,  $1-x=y$  であるから,

$$\overrightarrow{EF} = -y\vec{a} + y\vec{c} = y(\vec{c} - \vec{a}) = y\overrightarrow{AC}$$

よって,  $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AC}$  となるので,  $AE:EB = CF:FB$  が成立する. ■

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体をなすとき,  $\overrightarrow{HG} \parallel \overrightarrow{EI}$ ,  $\overrightarrow{HD} \parallel \overrightarrow{FI}$  が成立するから,

(1)と同様にして,

$$AE:EB = AI:IC$$

$$CF:FB = CI:IA$$

が成立する. ここで(1)の結果から,

$$AI:IC = CI:IA \quad \therefore AI = IC$$

となって, I は AC の中点である. 正八面体の平行な 2 つの辺に関し, 今までと同様の議論を繰り返せば, D, E, F, G, H も四面体の各辺の中点であることがいえる. このとき, 四面体の各辺の長さは正八面体の 1 辺の長さの 2 倍であり全て等しい. したがって, 四面体 OABC は正四面体である. ■

【3】 与えられた条件を変形すると、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+2\beta) &= 2 \\ \Leftrightarrow \sin(\alpha+2\beta) &= 2\cos(\alpha+2\beta) \\ \Leftrightarrow \sin\alpha\cos2\beta + \cos\alpha\sin2\beta &= 2\cos\alpha\cos2\beta - 2\sin\alpha\sin2\beta \\ \Leftrightarrow \tan\alpha\cos2\beta + \sin2\beta &= 2\cos2\beta - 2\tan\alpha\sin2\beta \quad (\because \cos\alpha \neq 0) \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\tan\beta = \frac{1}{q}$  より、 $\cos2\beta$  と  $\sin2\beta$  は、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \cos\beta = q\sin\beta \\ \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \cos^2\beta = \frac{q}{q^2+1} \\ \sin^2\beta = \frac{1}{q^2+1} \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} \cos2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{q^2-1}{q^2+1} \\ \sin2\beta = 2\tan\beta\cos^2\beta = \frac{2q}{q^2+1} \end{cases}\end{aligned}$$

と表せるから、 $\tan\alpha = \frac{1}{p}$  と合わせて、①は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \cdot \frac{q^2-1}{q^2+1} + \frac{2q}{q^2+1} &= 2 \cdot \frac{q^2-1}{q^2+1} - 2 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{2q}{q^2+1} \\ \Leftrightarrow q^2-1+2pq &= 2pq^2-2p-4q \\ \Leftrightarrow (2p-1)q^2 + (-2p-4)q - 2p+1 &= 0\end{aligned}$$

と変形できる。

ここで、 $f(q) = (2p-1)q^2 + (-2p-4)q - 2p+1$  とおき、

放物線  $y = f(q)$  について考察することにする。

$p \geq 1$  より  $2p-1 > 0$  であるから、これは下に凸の放物線であり、軸は

$$q = \frac{p+2}{2p-1} \Leftrightarrow q = \frac{5}{2(2p-1)} + \frac{1}{2}$$

と表せることがわかる。

$p \geq 1$  より  $\frac{5}{2(2p-1)} + \frac{1}{2} \leq 3$  であるから、直線  $q = 4$  は必ず放物線の軸の右側にあり、

すなわち  $q \geq 4$  で  $y = f(q)$  は単調増加する。さらに、

$$f(4) = 22p - 31$$

より、 $q \geq 4$  かつ  $p \geq 2$  のときは  $f(q) = 0$  とはならないことがわかる。

一方、 $q \leq 3$  または  $p \leq 1$  のときについて考えると、

$p = 1$  のときは  $f(q) = 0 \Leftrightarrow q^2 - 6q - 1 = 0$  を満たす自然数  $q$  が存在せず、

$q = 1, 2, 3$  のときは  $f(1) = -2p - 4$ ,  $f(2) = 2p - 19$ ,  $f(3) = 10p - 20$  となるため、

$(p, q) = (2, 3)$  が①を満たすことがわかる。

したがって、求める  $p, q$  の組  $(p, q)$  は  $(2, 3)$  である。

$$\underline{\underline{p=2, q=3}} \cdots \cdots (\text{答})$$

【別解 1】

[1]  $q = 1$  のとき、

整数  $n$  を用いて  $\beta = \frac{\pi}{4} + n\pi$  であり、

$$\tan(\alpha+2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -p < 0$$

となって、題意の等式が成立しない。

[2]  $q \neq 1$  のとき、

$\tan2\beta$  は存在し、

$$\tan2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{q}}{1-\left(\frac{1}{q}\right)^2} = \frac{2q}{q^2-1} > 0$$

となる。これより

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+2\beta) &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{\tan\alpha + \tan2\beta}{1 - \tan\alpha\tan2\beta} &= 2 \\ \Leftrightarrow \tan\alpha + \tan2\beta &= 2(1 - \tan\alpha\tan2\beta) \\ \text{かつ } 1 - \tan\alpha\tan2\beta &\neq 0 \\ \Leftrightarrow \tan\alpha &= \frac{2 - \tan2\beta}{1 + 2\tan2\beta} \quad \text{かつ } \tan\alpha\tan2\beta \neq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} &= \frac{2(q^2 - q - 1)}{q^2 + 4q - 1} \quad \text{かつ } p \neq \frac{2q}{q^2 - 1}\end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$q^2 - q - 1 = \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 1 > 0$$

より、

$$\frac{1}{p} = \frac{2(q^2 - q - 1)}{q^2 + 4q - 1} \Leftrightarrow p = \frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。p は自然数であることから、 $p \geq 1$  より

$$\begin{aligned}\frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow q^2 + 4q - 1 &\geq 2(q^2 - q - 1) \quad (\because 2(q^2 - q - 1) > 0) \\ \Leftrightarrow q^2 - 6q - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (q - 3)^2 &\leq 10 \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

が必要である。また、p が自然数であることを考えると①の分母が偶数であるため、分子も偶数となる必要がある。すなわち q が奇数となることも必要である。

よって

$$q = 3, 5$$

が必要である。 $q = 5$  のとき  $p = \frac{22}{19}$  となって、不適である。

$q = 3$  のとき  $p = 2$  となり、 $p \neq \frac{2q}{q^2-1}$  も確かに満たすため、十分性も保たれる。

以上[1]、[2]より問題文の条件を満たす組は  $(p, q) = (2, 3)$  である。

$$\underline{\underline{p=2, q=3}} \cdots \cdots (\text{答})$$

【別解 2】

$\tan x$  の周期は  $\pi$  であり、条件は  $\tan(\alpha+2\beta) = 2$  であるので、 $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲で考えればよい。

さらに、 $p \geq 1, q \geq 1$  であるから  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}, 0 < \beta \leq \frac{\pi}{4}$  と考えてよい。

$q = 1$  のとき、 $\beta = \frac{\pi}{4}$  であり、

$$\tan(\alpha+2\beta) = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

となって、題意の等式が成立しない。

$q \neq 1$  のとき、 $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$  であるから、 $0 < \tan\beta < 1$  かつ  $\tan2\beta$  は存在し、

$0 < \tan2\beta$  をみtas。

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+2\beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan2\beta}{1 - \tan\alpha\tan2\beta} = 2 \\ \therefore \tan\alpha &= \frac{2 - \tan2\beta}{1 + 2\tan2\beta} \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

ここで、 $\tan\alpha = \frac{1}{p} \leq 1$  であるが、

・  $p = 1$  のとき、①より  $\tan2\beta = \frac{1}{3} \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\tan\beta = \frac{1}{q}$  より、

$$\tan2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{q}}{1-\left(\frac{1}{q}\right)^2} = \frac{2q}{q^2-1}$$

②に用いて、

$$\frac{2q}{q^2-1} = \frac{1}{3} \quad \therefore q^2 - 6q - 1 = 0$$

これをみtas整数 q は存在せず不適当。

・  $p \geq 2$  のとき

$$\frac{2 - \tan2\beta}{1 + 2\tan2\beta} \leq \frac{1}{2} \quad \therefore \tan2\beta \geq \frac{3}{4} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③に用いて、

$$\frac{2q}{q^2-1} \geq \frac{4}{3} \quad \therefore 3q^2 - 8q - 3 \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{3} \leq q \leq 3$$

よって、 $q = 2, 3$  であり、①に用いると

$$(q, \tan2\beta, \tan\alpha) = \left(2, \frac{4}{3}, \frac{2}{11}\right), \left(3, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

となって、 $(p, q) = (2, 3)$  のみが題意をみtas。

以上から、求める  $p, q$  の値は  $\underline{\underline{p=2, q=3}} \cdots \cdots (\text{答})$

- (1)  $\angle A = \frac{\pi}{3}$  と点  $P$  が内心より,

$$\angle PAB = \angle PAC = \frac{\pi}{6}$$

$$\angle PBA = \angle PBC (= \alpha \text{ とおく})$$

$$\angle PCB = \angle PCA (= \beta \text{ とおく})$$

$\triangle ABC$  において,

$$2 \cdot \frac{\pi}{6} + 2\alpha + 2\beta = \pi \text{ より, } \alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

$\triangle PBC$  において,

$$\angle BPC = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \dots\dots(\text{答})$$

- (2)  $BC$  を一辺とする正三角形を  $\triangle BCD$  とし,  
 $\triangle BCD$  の外接円を  $K$  とする. ただし, 点  $D$  は  $BC$   
 に関して  $A$  と反対側にとる.

(1)より, 点  $P$  は

円  $K$  の, 点  $D$  を含まない弧  $BC$

上にある.

点  $P$  から  $BC$  に下ろした垂線を  $PH$  とすると,

$r = PH$  である.

$r$  の最大値を  $r_0$  とすると,  $r_0$  は  $PB = PC$  のときの  
 $r$  であり,

$$r_0 = \frac{1}{2} \cdot (\triangle ABC \text{ の外接円の半径}) = \frac{1}{2}$$

また,  $\angle C = \frac{\pi}{2}$  のときの  $r$  を  $r_1$  とすると,

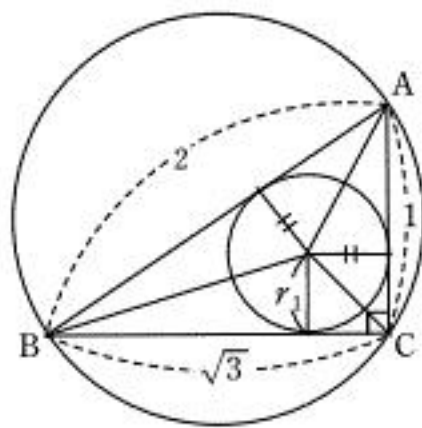
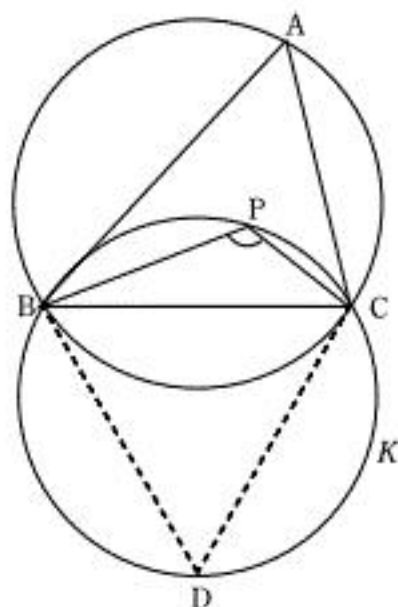
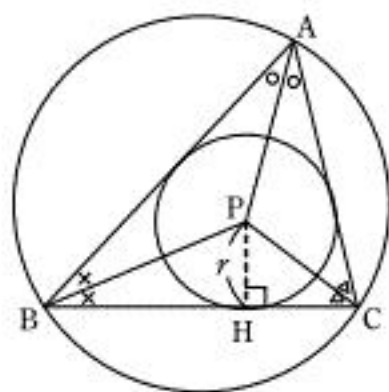
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)r_1$$

$$\sqrt{3} \cdot 1 = (2 + \sqrt{3} + 1) \cdot r_1$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

以上より,  $r_1 < r \leq r_0$  すなわち,

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{2} < r \leq \frac{1}{2} \dots\dots(\text{答})$$



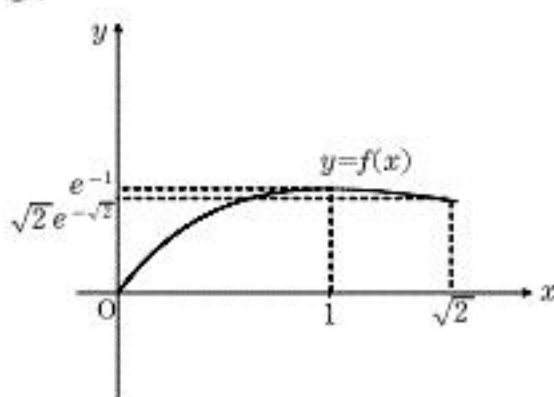
5  $f(x) = xe^{-x}$  とおく.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-1) \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot (-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$$

また,  $f(0) = 0, f(1) = e^{-1}, f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$ ,

よって,  $0 \leq x \leq \sqrt{2}$  での  $y = f(x)$  のグラフは上に凸であり, 概形は下図のようになる.



$y = f(x)$  と  $y = ax$  の共有点の  $x$  座標は,

$$xe^{-x} = ax$$

$$x = 0, e^{-x} = a$$

より,  $a = 0$  のとき  $x = 0, a > 0$  のとき  $x = 0, -\log a$

(i)  $-\log a \leq 0$ , すなわち,  $a \geq 1$  のとき,

$S(a)$  は右図の斜線部分の面積であるから,

$$S(a) = \int_0^{\sqrt{2}} (ax - xe^{-x}) dx$$

ここで,

$$\begin{aligned} \int xe^{-x} dx &= x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$F(x) = -(x+1)e^{-x}$  とおく.

よって,

$$\begin{aligned} S(a) &= \left[ \frac{1}{2}x^2 + (x+1)e^{-x} \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= a + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} - 1 \end{aligned}$$

(ii)  $-\log a \leq \sqrt{2}$ , または  $a = 0$ , すなわち,  $0 \leq a \leq e^{-\sqrt{2}}$  のとき,

$S(a)$  は右図の斜線部分の面積であるから,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{\sqrt{2}} (xe^{-x} - ax) dx \\ &= -a - (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1 \end{aligned}$$

(iii)  $0 < -\log a < \sqrt{2}$ , すなわち,  $e^{-\sqrt{2}} < a < 1$  のとき,

$S(a)$  は右図の 2 つの斜線部分の面積の和であるから,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{-\log a} (f(x) - ax) dx + \int_{-\log a}^{\sqrt{2}} \{ax - f(x)\} dx \\ &= [F(x)]_0^{-\log a} - \frac{1}{2}a[x^2]_0^{-\log a} + \frac{1}{2}a[x^2]_{-\log a}^{\sqrt{2}} - [F(x)]_{-\log a}^{\sqrt{2}} \\ &= 2F(-\log a) - F(0) - F(\sqrt{2}) - a(-\log a)^2 + a \end{aligned}$$

ここで,

$$F(-\log a) = (\log a - 1) \cdot a$$

$$F(0) = -1, F(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$$

よって,

$$S(a) = -a(\log a)^2 + 2a \log a - a + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$$

$$\begin{aligned} S'(a) &= -1 \cdot (\log a)^2 - a \cdot 2 \log a \cdot \frac{1}{a} + 2 \log a + 2a \cdot \frac{1}{a} - 1 \\ &= 1 - (\log a)^2 = (1 + \log a)(1 - \log a) \end{aligned}$$

$e^{-\sqrt{2}} < a < 1$  より,

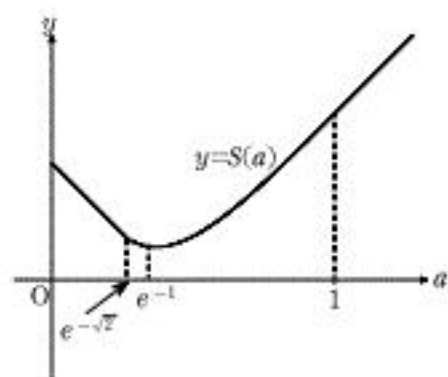
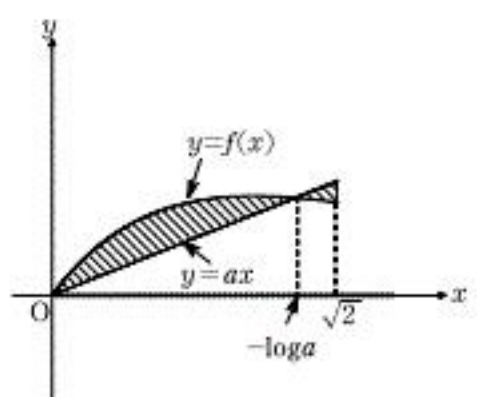
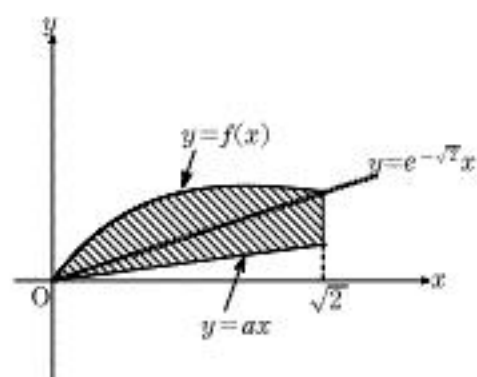
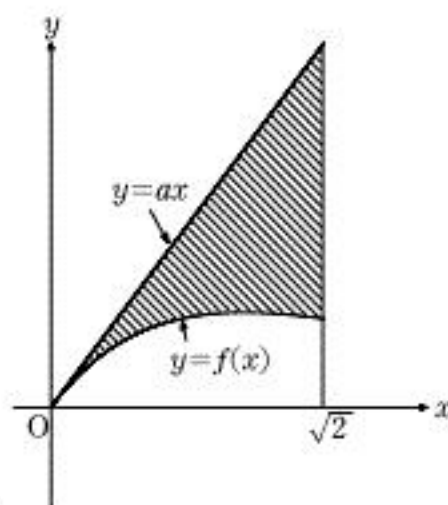
$1 - \log a > 0, S'(a) = 0$  を満たす  $a$  は

$$a = e^{-1}$$

以上(i) ~ (iii)より,  $y = S(a)$  のグラフは右図のようになる.

よって, 最小値は,

$$\begin{aligned} S(e^{-1}) &= -e^{-1}(\log e^{-1}) + 2e^{-1} \log e^{-1} - e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1 \\ &= \underline{\underline{-4e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1}} \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$



6  $X$  の各位の数を  $a_1, a_2, \dots, a_n$  とし,  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  とおく.

$X$  が 3 で割り切れる  $\Leftrightarrow S_n$  を 3 で割ったときの余りが 0 である.

である.

次に  $S_n$  を 3 で割ったときの余りが 0, 1, 2 である確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n$  とする.

$S_{n+1}$  が 3 で割り切れるのは,

(ア)  $S_n$  が 3 で割り切れ, かつ,  $a_{n+1} = 3$

(イ)  $S_n$  を 3 で割ると余りが 1, かつ,  $a_{n+1} = 2, 5$

(エ)  $S_n$  を 3 で割ると余りが 2, かつ,  $a_{n+1} = 1, 4$

のいずれかである. よって,

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{1}{5} + q_n \cdot \frac{2}{5} + r_n \cdot \frac{2}{5} \dots\dots ①$$

$p_n + q_n + r_n = 1$  を用いると,

$$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}(1 - p_n)$$

$$p_{n+1} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{2}{5}$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

よって,

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$p_1 = \frac{1}{5}$  より,

$$p_n = -\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

よって, 求める確率  $p_n$  は

$$\underline{\underline{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3} \dots\dots (答)}}$$