

$|x_0| > 1$ とすると,

$$\begin{cases} C_1: y = x^2 - 1 \text{ より, } & y' = 2x \\ C_2: y = x^2 - 2ax + 2 \text{ より, } & y' = 2x - 2a \end{cases}$$

よって, $2x_0 = 2x_0 - 2a$ が必要だが, これは $a > 0$ に反する.

ゆえに,

$$|x_0| < 1$$

したがって,

$$C_1: y = -x^2 + 1 \text{ より, } y' = -2x$$

であり, C_1 と C_2 が (x_0, y_0) で共通の接線をもつ条件は,

$$\begin{cases} -x_0^2 + 1 = x_0^2 - 2ax_0 + 2 \\ -2x_0 = 2x_0 - 2a \end{cases}$$

$a > 0$ より,

$$a = \sqrt{2}, x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

このとき,

$$C_2: y = (x - \sqrt{2})^2$$

また,

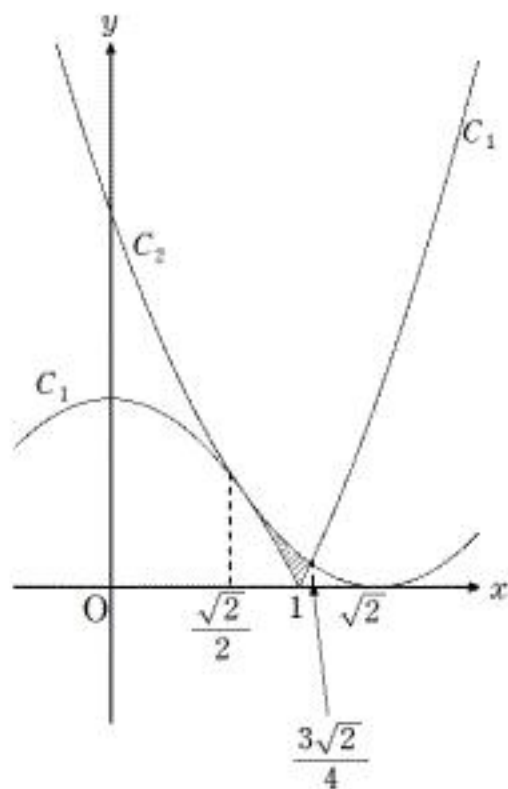
$$x^2 - 1 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$$

を満たす x は,

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{4} (> 1)$$

以上より, C_1 と C_2 で囲まれる部分は図の斜線部分で

あり, その面積を S とすると,



$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \{(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) - (-x^2 + 1)\} dx + \int_1^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \{(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) - (x^2 - 1)\} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \sqrt{2}x^2 + x \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 + \left[-\sqrt{2}x^2 + 3x \right]_1^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \\ &= \left(\frac{5}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{6} \right) + \left(\frac{17\sqrt{2}}{8} - 3 \right) \\ &= \frac{23\sqrt{2}}{24} - \frac{4}{3} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(1) $\angle BAP = \theta$ $\left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$ とする.

$\triangle ABP$ において,

$$AP = AB \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

AP の中点を M とすると, $AM = \frac{1}{2\cos \theta}$ である.

$AM \perp QR$ より, $\angle ARQ = \theta$ に注意して,

$\triangle AQM, \triangle AQR$ において,

$$\begin{aligned} QR &= AQ \cdot \frac{1}{\sin \theta} \\ &= AM \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{2\cos^2 \theta \sin \theta} \\ &= \frac{1}{2(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta} \end{aligned}$$

よって,

$$\underline{\underline{QR = \frac{1}{2(1 - \sin^2 \angle BAP) \sin \angle BAP}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $2(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta$ で $t = \sin \theta$ とすると,

$0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ より, $0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり,

$$2(1 - t^2)t = 2(t - t^3) \quad (=f(t) \text{ とする})$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(1 - 3t^2) \\ &= -6\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

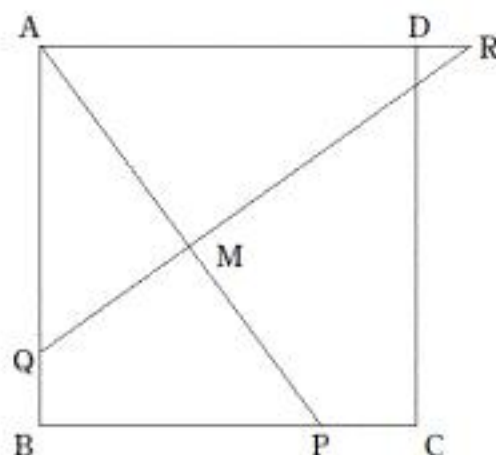
よって, $f(t)$ の増減は右の表のようになり,

$f(t)$ は最大値

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

をとる. つまり, QR の最小値は

$$\underline{\underline{\frac{1}{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{4}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$



t	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\nearrow$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$

$$\begin{aligned}n^3 - 7n + 9 &= n^3 - n - 6n + 9 \\&= (n-1)n(n+1) - 6n + 9\end{aligned}$$

n が整数のとき、 $(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であり、3 の倍数である。
よって、 $n^3 - 7n + 9$ は 3 の倍数であるから、これが素数であるのは 3 のみである。

$$\begin{aligned}n^3 - 7n + 9 &= 3 \\(n-1)(n-2)(n+3) &= 0 \\ \therefore \underline{\underline{n=1, 2, -3}} &\quad \cdots \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする.

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BD}|^2 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |\vec{d}-\vec{b}|^2 \\ |\vec{c}|^2 &= |\vec{d}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{d} + |\vec{b}|^2 \end{aligned} \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 \text{ についても同様に,}$$

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{d} + |\vec{b}|^2 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

①+②より,

$$0 = -2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} + 2|\vec{b}|^2 \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ} &= \vec{b}\cdot\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{d} - |\vec{b}|^2) \\ &= 0 \quad (\because \textcircled{3} \text{より}) \end{aligned}$$

したがって, $AB \perp PQ$ である. ■

(2) ①-②より,

$$0 = -2\vec{b}\cdot\vec{c} - 2\vec{b}\cdot\vec{d} + 2|\vec{d}|^2 - 2|\vec{c}|^2 \quad \cdots\cdots\textcircled{4}$$

よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ} &= (\vec{d}-\vec{c})\cdot\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{d} + |\vec{d}|^2 - |\vec{c}|^2) \\ &= 0 \quad (\because \textcircled{4} \text{より}) \end{aligned}$$

したがって, $CD \perp PQ$ でもある.

上記のことから, PQ を軸とし, 図形全体を 180° 回転すると元の図形と一致する.

よって, PQ を含む任意の平面 α によって, 四面体 $ABCD$ を切って得られる図形は合同であり, 体積は等しい. ■

5 各回の操作において、球の総数は1ずつ増えることに注意する。

i 回目に取り出した球に書かれている数を a_i とする。

(1) X_n が最大となるのは、 $a_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) のときで、このとき、

$$X_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

である。また、 $n \geq 3$ で、ある j ($1 \leq j \leq n-1$) に対して、

$a_j = k$ ($1 \leq k \leq j-1$) とすれば、

$$\begin{aligned} X_n &\leq 0 + 1 + 2 + \cdots + k + k + (k+1) + \cdots + (n-1) \\ &\leq 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n - 1 \end{aligned}$$

となって、題意を満たさない。よって、

$$X_n \geq 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n - 1$$

を満たすものは、

(i) $a_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) のとき

$$X_i = 0 + 1 + 2 + \cdots + i \text{ より、}$$

$$X_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) $a_i = 0$ ($1 \leq i \leq n-1$), $a_n = n-1$ のとき

$$X_i = 1 + 2 + \cdots + i \text{ ($1 \leq i \leq n-1$) より、}$$

$$X_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-1)$$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} = \frac{2}{n!} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) X_n が最小となるのは、 $a_1 = 0, a_i = 1$ ($2 \leq i \leq n$) のときで、このとき、

$$X_n = 0 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

である。また、 $n \geq 3$ で、ある j ($2 \leq j \leq n$) で $a_j \neq 1$ となるものが

2 つ以上存在するとすれば、

$$X_n \geq 0 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 2 + 2 + 1 + \cdots + 1 = n + 2$$

となって、題意を満たさない。よって、

$$X_n \leq 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 (= n + 1)$$

を満たすものは、

(i) $a_1 = 0, a_i = 1$ ($2 \leq i \leq n$) のとき

$$X_n = 0 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

(ii) $a_1 = 0, a_2$ から a_n のうちから 1 つだけが 0、他は 1 のとき

$$X_n = 0 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 2 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$$

よって、求める確率は $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{k-1}{k+1} \cdots \frac{n-2}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{n!} \\ &= \frac{1}{n} + (n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{n!} \\ &= \frac{2}{n} \quad \cdots \cdots (\text{答}) (n=2 \text{ のときも成立}) \end{aligned}$$