

(1) 接点の x 座標を t とする.

$$C_1: y = ax^2 \text{ において, } y' = 2ax$$

$$C_2: y = b(x-1)^2 + c \text{ において, } y' = 2b(x-1)$$

よって, (ii) は

$$\begin{cases} at^2 = b(t-1)^2 + c & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2at = 2b(t-1) & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } b(t-1)^2 = at(t-1)$$

これを $\textcircled{1}$ に代入して,

$$at^2 = at(t-1) + c$$

$$at = c$$

$a \neq 0$ より,

$$t = \frac{c}{a} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

よって, 接点の座標は

$$\left(\frac{c}{a}, \frac{c^2}{a} \right) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) $\textcircled{2}$ に $\textcircled{3}$ を代入して,

$$c = b \cdot \left(\frac{c}{a} - 1 \right), \text{ すなわち } c = \frac{c-a}{a} b$$

$b \neq 0, c \neq 0$ より, $c \neq a$ であり,

$$b = \frac{ac}{c-a} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

以上より, a, c の満たす条件は,

$$a \neq 0, c \neq 0, a \neq c, 1 + c^2 \leq 2a \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

であり, b は $\textcircled{4}$ で定まる.

接点を (X, Y) とおくと,

$$X = \frac{c}{a}, Y = \frac{c^2}{a}$$

$a \neq 0, c \neq 0$ を用いて, a, c について解くと,

$$a = \frac{Y}{X^2}, c = \frac{Y}{X}$$

これを $\textcircled{5}$ に代入して,

$$\frac{Y}{X^2} \neq 0, \frac{Y}{X} \neq 0, \frac{Y}{X^2} \neq \frac{Y}{X}, 1 + \left(\frac{Y}{X} \right)^2 \leq 2 \frac{Y}{X^2}$$

整理して,

$$X \neq 0, Y \neq 0, X \neq 1, X^2 + (Y-1)^2 \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

したがって, 接点が動く範囲は,

$\textcircled{6}$ を満たす点 (X, Y) の全体

すなわち,

$$x \neq 0, y \neq 0, x \neq 1, x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

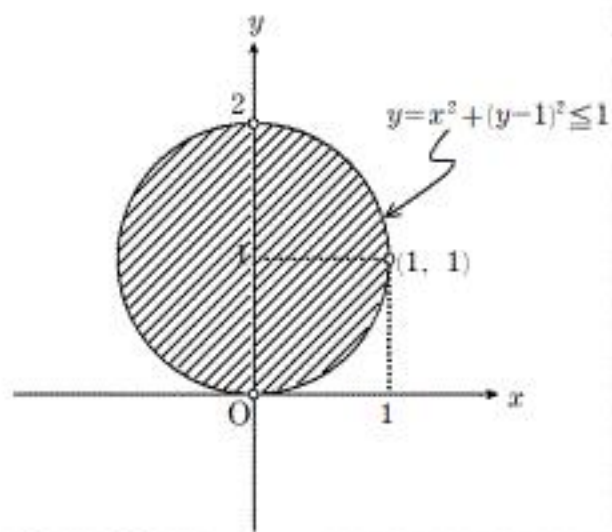
であり, 図示すると右図の斜線部分である.

ただし, 境界線は 3 点 $(0, 0), (0, 2), (1, 1)$

以外の部分をすべて含む. さらに, y 軸上の点はすべて除く.

したがって, 接点が動く範囲は,

$$\underline{x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \text{ かつ } x \neq 0 \text{ かつ } (x, y) \neq (1, 1)} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



$$\begin{aligned}n^3 - 7n + 9 &= n^3 - n - 6n + 9 \\&= (n-1)n(n+1) - 6n + 9\end{aligned}$$

n が整数のとき、 $(n-1)n(n+1)$ は連続する 3 つの整数の積であり、3 の倍数である。
よって、 $n^3 - 7n + 9$ は 3 の倍数であるから、これが素数であるのは 3 のみである。

$$\begin{aligned}n^3 - 7n + 9 &= 3 \\(n-1)(n-2)(n+3) &= 0 \\ \therefore \underline{\underline{n=1, 2, -3}} \quad \cdots \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

四角形 ABCD の外接円の中心を O とし、 $\angle OAD = \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。

円に内接する四角形の内対角の和が π であるから、 $\angle BCD = \angle ADC = \pi - \alpha$ であることに注意する。

(i) $0 < \theta \leq \alpha$ のとき

$\triangle OAB$ は等辺の長さが 1、底角が $\alpha - \theta$ である二等辺三角形であるから、

$$AB = 2\cos(\alpha - \theta)$$

である。 $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODA$ についても同様にして、

$$BC = 2\cos\theta, CD = 2\cos(\pi - \alpha - \theta),$$

$$DA = 2\cos\theta$$

よって、

$$k = 16\cos(\alpha - \theta)\cos\theta\cos(\pi - \alpha - \theta)\cos\theta$$

と表される。

(ii) $\alpha \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$\triangle OAB$ は等辺の長さが 1、底角が $\theta - \alpha$ である二等辺三角形であるから、

$$AB = 2\cos(\theta - \alpha)$$

である。 $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODA$ についても同様にして、

$$BC = 2\cos\theta, CD = 2\cos(\pi - \alpha - \theta),$$

$$DA = 2\cos\theta$$

よって、

$$k = 16\cos(\theta - \alpha)\cos\theta\cos(\pi - \alpha - \theta)\cos\theta$$

と表される。

(i), (ii)より、いずれにせよ

$$k = 16\cos\theta\cos(\alpha - \theta)\cos\theta\cos(\pi - \alpha - \theta)$$

$$= -16\cos^2\theta\cos(\alpha - \theta)\cos(\alpha + \theta)$$

と表される。

$$\cos(\alpha - \theta)\cos(\alpha + \theta) = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 2\alpha)$$

また、 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$ より、

$$k = -4(\cos 2\theta + \cos 2\alpha)(\cos 2\theta + 1)$$

ここで、 $\cos 2\theta = t$ とすると、 $-1 < t < 1$ であり、 $\cos 2\alpha = a$ とすれば、

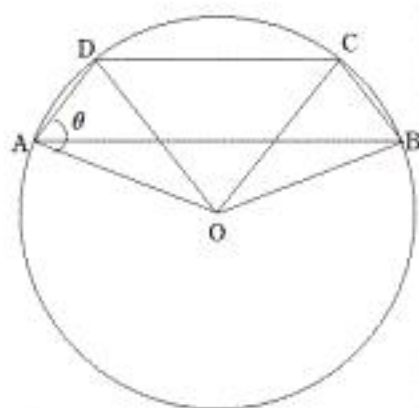
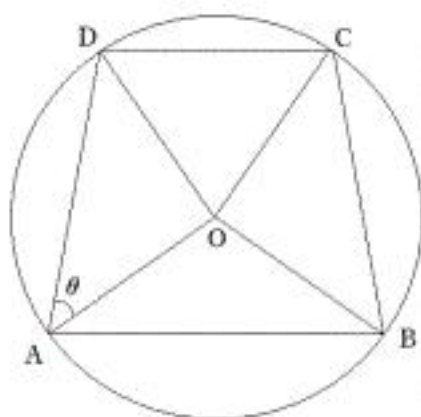
$$k = -4(t + a)(t + 1) = -4\left(t + \frac{a+1}{2}\right)^2 + (a-1)^2$$

$-1 < -\frac{a+1}{2} \leq 0$ であるから、

k は $t = -\frac{a+1}{2}$ のときに最大値

$$\begin{aligned} (a-1)^2 &= (\cos 2\alpha - 1)^2 \\ &= \underline{4\sin^4\alpha} \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

をとる。



$z_1, z_2, \dots, z_n$ の定め方より, z_k は

$$z_k = 1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

のいずれかであり, それぞれの事象を A_k, B_k, C_k とし, 確率をそれぞれ a_k, b_k, c_k とする.

A_{k+1} は, 次の 2 つの場合にもれなく排反に分けることができる.

$$\begin{cases} \cdot A_k \text{ かつ } k+1 \text{ 回目に裏が出る} \\ \cdot C_k \text{ かつ } k+1 \text{ 回目に表が出る} \end{cases}$$

よって,

$$a_{k+1} = a_k \cdot \frac{1}{2} + c_k \cdot \frac{1}{2} \quad (k \geq 1) \quad \dots\dots ①$$

同様に,

$$b_{k+1} = a_k \cdot \frac{1}{2} + c_k \cdot \frac{1}{2} \quad (k \geq 1) \quad \dots\dots ②$$

また,

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ③$$

①, ②より,

$$a_{k+1} = b_{k+1} \quad (k \geq 1)$$

これと③より,

$$a_k = b_k \quad (k \geq 1) \quad \dots\dots ④$$

①に, $a_k + b_k + c_k = 1 \quad (k \geq 1)$ を用いると,

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + c_k) = \frac{1}{2}(1 - b_k)$$

さらに, ④を用いると,

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(1 - a_k)$$

よって,

$$a_{k+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_k - \frac{1}{3}\right)$$

と変形できて,

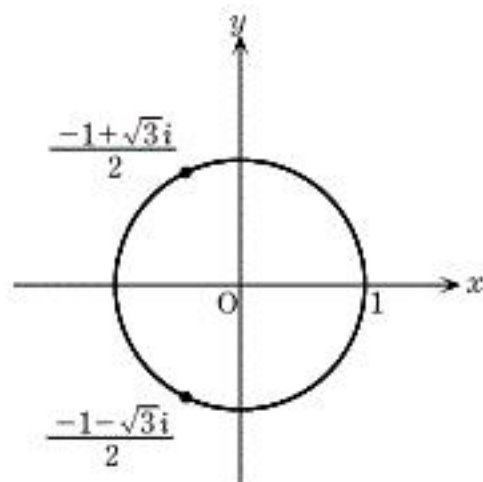
$$a_k - \frac{1}{3} = \left(a_1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad (k \geq 1)$$

③を用いて,

$$a_k = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\}$$

よって, $z_n = 1$ となる確率は,

$$\underline{\underline{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}}} \quad \dots\dots (\text{答})$$



(1) $y = \log x$ より, $y' = \frac{1}{x}$ であるから, 点 A での法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると,

$$\vec{n} = (1, -t)$$

としてもよい. B の x 座標は t より大きいので,

$$\overrightarrow{AB} = k\vec{n} \quad (k > 0)$$

とかけて, $|\overrightarrow{AB}| = 1$ より,

$$k = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

よって,

$$\underline{\underline{(u(t), v(t)) = \left(t + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, v(t) = \log t - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) \quad \cdots \cdots (\text{答})}}$$

次に,

$$\frac{du}{dt} = 1 - \frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2t = 1 - \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{t} - \left[1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + t \left\{ -\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \right] = \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

すなわち,

$$\underline{\underline{\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) = \left(1 - \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{t} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad \cdots \cdots (\text{答})}}$$

(2)

$$\bullet L_1(r) = \int_r^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_r^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\bullet L_2(r) = \int_r^1 \sqrt{\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

ここに, (1)より, $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{du}{dt}$

よって,

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \left[1 - \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^2$$

また, $r \leq t \leq 1$ において,

$$(1+t^2)^{\frac{3}{2}} = (1+t^2)\sqrt{1+t^2} > \sqrt{1+t^2} > \sqrt{t^2} = t$$

より,

$$\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} < 1$$

以上より,

$$L_2(r) = \int_r^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \left[1 - \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dt \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$L_1(r) - L_2(r) = \int_r^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \cdot \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \int_r^1 \frac{1}{1+t^2} \cdot dt$$

ここで, $t = \tan \theta$ と置き換え, $r = \tan \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \right)$ とする.

$$dt = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad \left. \begin{array}{l} t \\ \theta \end{array} \right| \begin{array}{l} r \rightarrow 1 \\ \alpha \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

より,

$$L_1(r) - L_2(r) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{4} - \alpha$$

ここに, $r \rightarrow +0$ のとき $\alpha \rightarrow 0$ であるから,

$$\underline{\underline{\lim_{r \rightarrow +0} (L_1(r) - L_2(r)) = \frac{\pi}{4} \quad \cdots \cdots (\text{答})}}$$

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とする.

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BD}|^2 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |\vec{d} - \vec{b}|^2 \\ |\vec{c}|^2 &= |\vec{d}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{b}|^2 \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 \text{ についても同様に,}$$

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 \quad \dots\dots ②$$

①+②より,

$$0 = -2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + 2|\vec{b}|^2 \quad \dots\dots ③$$

ここで,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \vec{b} \cdot \frac{\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} - |\vec{b}|^2) \\ &= 0 \quad (\because ③ \text{より}) \end{aligned}$$

したがって, $AB \perp PQ$ である. ■

(2) ①-②より,

$$0 = 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{d} + 2|\vec{d}|^2 - 2|\vec{c}|^2 \quad \dots\dots ④$$

よって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PQ} &= (\vec{d} - \vec{c}) \cdot \frac{\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{d}|^2 - |\vec{c}|^2) \\ &= 0 \quad (\because ④ \text{より}) \end{aligned}$$

したがって, $CD \perp PQ$ でもある.

上記のことから, PQ を軸とし, 図形全体を 180° 回転すると元の図形と一致する.

よって, PQ を含む任意の平面 α によって, 四面体 $ABCD$ を切って得られる図形は合同であり, 体積は等しい. ■