

問 1

$x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2$ を $x^3 + x^2 + x + 1$ で割ると,

$$\begin{aligned} & x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2 \\ &= (x^3 + x^2 + x + 1)\{x^2 + x + (a-2)\} + (3-a)x^2 + (4-a)x - a + 4 \end{aligned}$$

すなわち,

$$Q(x) = x^2 + x + (a-2), R(x) = (3-a)x^2 + (4-a)x - a + 4$$

よって,

$$4-a=1 \text{ より, } \underline{\underline{a=3}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

このとき,

$$\underline{\underline{Q(x) = x^2 + x + 1, R(x) = x + 1}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

問 2

$x = 8.94^{18}$ とおくと,

$$\log_{10} x = 18 \log_{10} 8.94 = 18 \times 0.9513 = 17.1234 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

よって,

$$17 < \log_{10} x < 18$$

$$10^{17} < x < 10^{18}$$

すなわち,

$$8.94^{18} \text{ の整数部分は } \underline{\underline{18 \text{ 桁}}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

次に, 最高位の数字を a とすると, $1 \leq a \leq 9$ であり,

$$9 \times 10^{17} < x < (a+1) \times 10^{17}$$

$$\log_{10} a + 17 < \log_{10} x < \log_{10} (a+1) + 17$$

$$\log_{10} a < 0.1234 < \log_{10} (a+1) \quad (\textcircled{1} \text{ より})$$

$y = \log_{10} t$ ($t > 0$) は t の増加関数である $\cdots \cdots \textcircled{2}$

また, $\log_{10} 1 = 0, \log_{10} 2 = 0.3010$

以上より, $a = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

さらに, 最高位の次の数字を b とすると, $1 \leq b \leq 9$ であり,

$$1 \times 10^{17} + b \times 10^{16} < x < 1 \times 10^{17} + (b+1) \times 10^{16}$$

$$10 + b < x \times 10^{-16} < 10 + (b+1)$$

$$\log_{10} (10 + b) < \log_{10} x - 16 < \log_{10} (11 + b)$$

$$\log_{10} (10 + b) < 1.1234 < \log_{10} (11 + b) \quad (\textcircled{1} \text{ より})$$

②, また,

$$\log_{10} 13 = \log_{10} (1.3 \times 10) = \log_{10} 1.3 + 1 = 1.1139$$

$$\log_{10} 14 = \log_{10} (1.4 \times 10) = \log_{10} 1.4 + 1 = 1.1461$$

以上より, $b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

③, ④より,

$$\text{最高位からの 2 桁の数字は } \underline{\underline{13}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

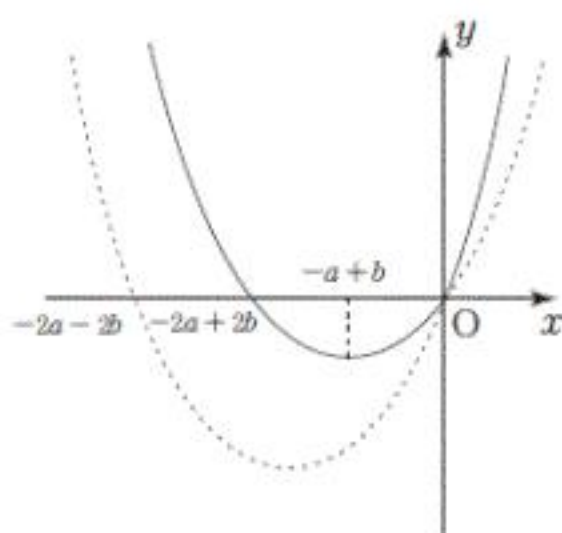
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2(a+b)x & (x \geq 0) \\ x^2 + 2(a-b)x & (x \leq 0) \end{cases}$$

$x^2 + 2(a \pm b)x = 0$ より $x = 0, -2a - 2b, -2a + 2b$ であり, $b > 0$ から $-2a - 2b < -2a + 2b$ となることに注意して

(i) $-2a + 2b \leq 0$ つまり $b \leq a$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは右の図の実線部のようになり

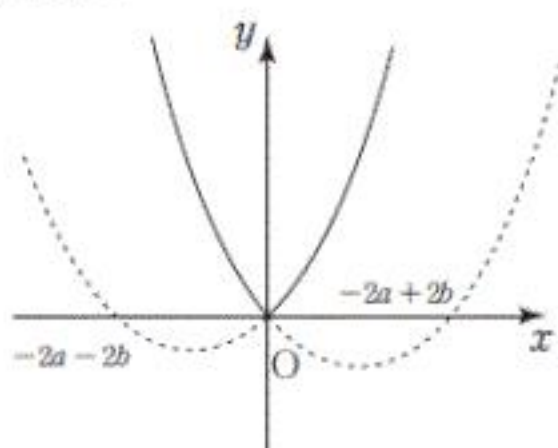
$$\begin{aligned} m &= f(-a+b) \\ &= -(a-b)^2 \end{aligned}$$



(ii) $-2a - 2b \leq 0 < -2a + 2b$ つまり $-b \leq a < b$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは右の図の実線部のようになり

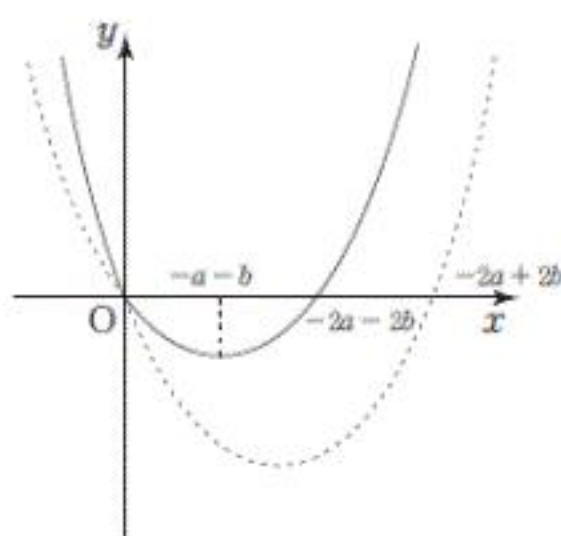
$$m = f(0) = 0$$



(iii) $0 < -2a - 2b$ つまり $a < -b$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは右の図の実線部のようになり

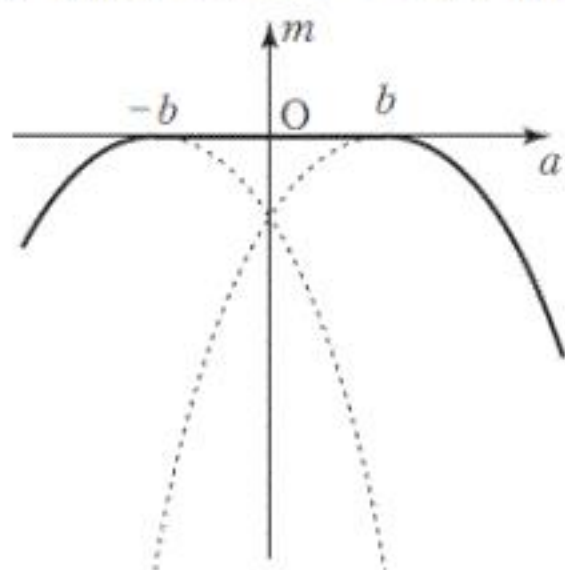
$$\begin{aligned} m &= f(-a-b) \\ &= -(a+b)^2 \end{aligned}$$



以上の(i), (ii), (iii)をまとめると

$$m = \begin{cases} -(a-b)^2 & (b \leq a) \\ 0 & (-b \leq a < b) \dots\dots(\text{答}) \\ -(a+b)^2 & (a < -b) \end{cases}$$

これを am 平面にグラフとして描くと下の図の太線部のようになる。



3 題意の命題を P とする.

$P \Rightarrow b = 0$ に対してある実数 x が $ax^2 + c < 0$ をみたす

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \text{ かつ } c < 0 \\ \text{または} \\ a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a < 0 \text{ または } c < 0$$

つまり P に対して $a < 0$ または $c < 0$ であることが必要.

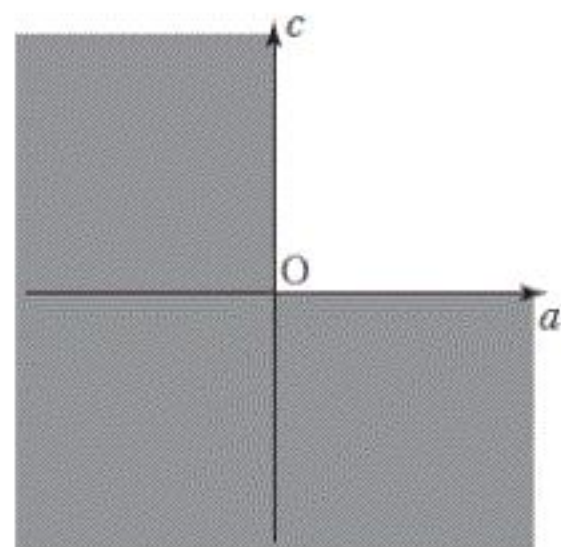
次に

- $a < 0$ ならばすべての実数 b に対して充分大きい x が $ax^2 + bx + c < 0$ をみたす.
- $c < 0$ ならばすべての実数 b に対して $x = 0$ が $ax^2 + bx + c < 0$ をみたす.

であるから, これで十分.

以上のことから $P \Leftrightarrow a < 0$ または $c < 0$ ……(答)

これを図示すると下の図の網目部となる. ただし境界はすべて含まない.



4 与えられた条件から

$X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ はすべて 4 以下かつ X_k が 5 以上であり, これについての確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$ である. さらに $k+1$ 回目から n 回目について

(i) $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$ がすべて 5 以上のとき, この確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$ である.

(ii) $k+1 \leq i \leq n$ に対して $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_{i-1}$ がすべて 5 以上かつ $X_i, X_{i+1}, \dots, X_n$ がすべて 4 以下のとき, この確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^{i-k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i+1}$

(i) は (ii) において $i = n+1$ とすれば一致するので, 求める確率を p として

$$p = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \left\{ \sum_{i=k+1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i+1} \right\}$$

ここで異なる実数 a, b に対して

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a^{k-1} b^{n-k} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

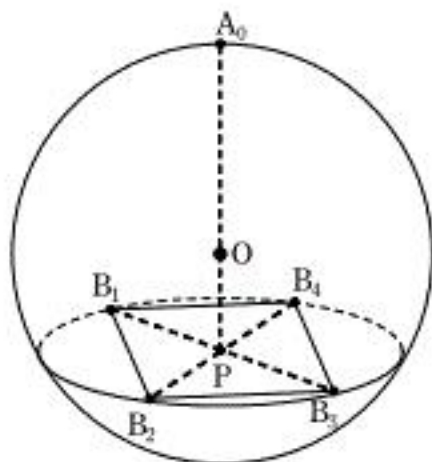
が成立することに注意すると

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k+1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n-k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{j-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1-j} \quad (j = i - k \text{ とした}) \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} \\ &= 3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1} \right\} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1} \right\} \\ &= n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} \\ &= (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

底面の正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を、まず固定し、
 体積を最大にする点 A の位置を考える。
 点 A と底面の距離を最大する点 A であり、
 それを A_0 とおく。点 A_0 と底面の距離を h
 とする。また、球面の中心を O 、
 正方形 $B_1B_2B_3B_4$ の対角線の交点を P とする。



(i) $O=P$ のとき、 O を通り底面に垂直な直線と、球面との交点が A_0 であり、

$$h=1, B_1P=1$$

(ii) $O \neq P$ のとき、 $OP \perp$ 底面であり、 P, O, A_0 はこの順に一直線上にある。

$$OP=p \text{ とすると、 } h=OA_0+OP=1+p$$

また、 $\triangle OB_1P$ に三平方の定理を用いて、

$$B_1P = \sqrt{OB_1^2 - OP^2} = \sqrt{1-p^2}$$

(i), (ii) はまとめることができ、

$$0 \leq p < 1, h=1+p, B_1P = \sqrt{1-p^2}$$

また、正方形の面積は、

$$\left(\frac{1}{2} B_1P^2 \right) \times 4 = 2(1-p^2)$$

四角錐の体積を V とおくと、

$$V = \frac{1}{3} \times 2(1-p^2) \times (1+p) = \frac{2}{3}(-p^3 - p^2 + p + 1) \quad (0 \leq p < 1)$$

次に p を動かせばよい。 V を p で微分して、

$$V' = \frac{2}{3}(-3p^2 - 2p + 1) = -\frac{2}{3}(p+1)(3p-1)$$

$0 \leq p < 1$ に注意して、

p	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
V'		+	0	-	
V		↗		↘	

また、 $p = \frac{1}{3}$ のとき、 $V = \frac{64}{81}$

よって、

体積の最大値は $\underline{\underline{\frac{64}{81}}}$ (答)