

問 1

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = p \quad (p \text{ は有理数}) \dots\dots ①$$

$$\cos 3\theta = -3\cos \theta + 4\cos^3 \theta = q \quad (q \text{ は有理数}) \dots\dots ②$$

$$① \text{ より, } \cos^2 \theta = \frac{p+1}{2}$$

これを②に代入して,

$$-3\cos \theta + 4\frac{p+1}{2}\cos \theta = q$$

$$(2p-1)\cos \theta = q$$

$2p-1 \neq 0$ と仮定すると,

$$\cos \theta = \frac{q}{2p-1}$$

となり, これは $\cos \theta$ が有理数でないことに反する. したがって,

$2p-1=0$ であり, ①より,

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

これと, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\theta = \frac{\pi}{6}$

このとき, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$, $\cos 3\theta = 0$ であり, $\sqrt{3}$ は有理数でない.

以上より,

$$\underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{6}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

問 2

(1)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)' dx = [x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{\pi}{4} + \left[\log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx$$

$\sin x = t$ とおくと,

$$\cos x dx = dt, \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ \hline t & 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{(1+t)(1-t)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\log |1-t| + \log |1+t| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right| = \underline{\underline{\log(\sqrt{2}+1)}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

2 n が偶数のとき, $n = 2k$ と表すと

$$|f(n)| = |(2k)^3 + 2(2k)^2 + 2| = 2|4k^3 + 4k^2 + 1|$$

これが素数であるのは $|f(n)| = 2$ のときのみである.

一方, n が奇数のときは $n+1$ が偶数であり, 上と同様の議論から

$|f(n+1)| = 2$ のときのみである.

ここで, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ について

$$f'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x + 4)$$

より, $f(x)$ の増減は右の表のようになる.

x		$-\frac{4}{3}$		0	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	2	

これから $y = |f(x)|$ のグラフは右の図のようになり, $|f(-3)| = 7$ と合わせて,

$$|f(x)| = 2 \text{ かつ } x \text{ が整数}$$

$$\iff x = -2, 0$$

よって $n = -3, -2, -1, 0$ であることが必要である.

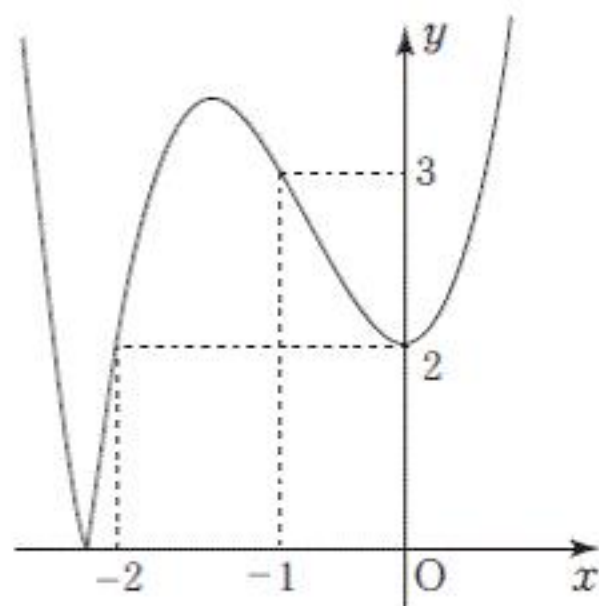
このとき

$$|f(-3)| = 7, |f(-2)| = 2, |f(-1)| = 3,$$

$$|f(0)| = 2, |f(1)| = 5$$

よりすべて素数であり $n = -3, -2, -1, 0$ のとき $|f(n)|, |f(n+1)|$ ともに素数となって十分である.

以上のことから $n = -3, -2, -1, 0, \dots$ (答)



正の実数 a, b, c ($a < c$) を用いて, $A(a, b), B(0, 0), C(c, 0)$ と座標設定しても一般性は失われないため,

以下では鋭角三角形 ABC を xy 座標平面上で考える. このとき, $S = \frac{bc}{2}$ である. 点 Q, P についての条件より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= t\overrightarrow{BQ} \\ &= t\{(1-t)\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{BC}\} \\ &= (t(1-t)a, t(1-t)b) + (t^2c, 0) \\ &= ((c-a)t^2 + at, bt(1-t))\end{aligned}$$

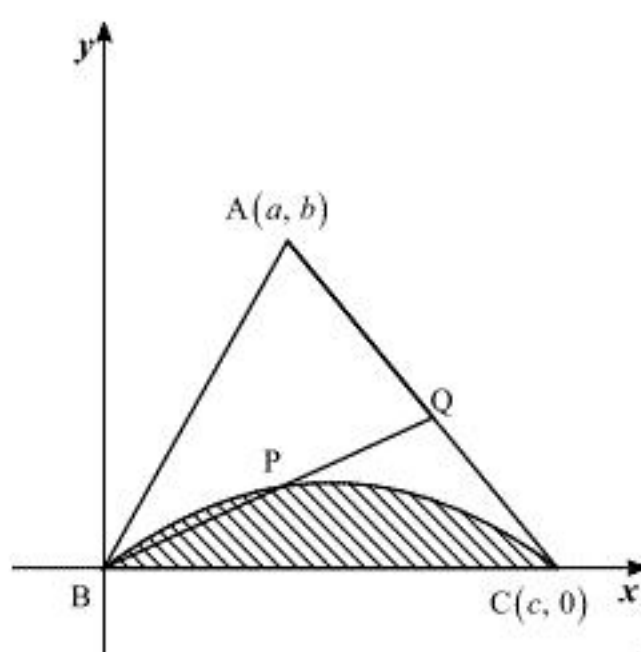
であるから, 点 $P((c-a)t^2 + at, bt(1-t))$ と, t を用いて表すことができる. ここで,

$$x = (c-a)t^2 + at, y = bt(1-t)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2(c-a)t + a > 0 \quad (\because 0 < t < 1, 0 < a < c) \\ y &= bt(1-t) > 0 \quad (\because 0 < t < 1, 0 < b)\end{aligned}$$

が成立し, $t=0, 1$ とすると点 P がそれぞれ点 B, C に一致することから, 点 P の描く曲線と, 線分 BC に囲まれる部分の概形は, 以下の斜線部分のようになる.



したがって, 上図の斜線部分の領域の面積は,

$$\begin{aligned}\int_0^c y dx &= \int_0^1 bt(1-t) \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^1 b(t-t^2) \{2(c-a)t + a\} dt \\ &= b \int_0^1 \{-2(c-a)t^3 + (2c-3a)t^2 + at\} dt \\ &= b \left[-\frac{1}{2}(c-a)t^4 + \frac{1}{3}(2c-3a)t^3 + \frac{1}{2}at^2 \right]_0^1 \\ &= b \left(-\frac{c-a}{2} + \frac{2c-3a}{3} + \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{bc}{6} \\ &= \frac{1}{3}S\end{aligned}$$

と, S を用いて表すことができる.

$$\frac{1}{3}S \quad \dots\dots (\text{答})$$

[別解]

3 $A(0, 0), B(a, b), C(0, c)$ (a, b, c は正の定数) とする座標平面において考える.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AQ} \\ &= (1-t)\overrightarrow{AB} + t \cdot t\overrightarrow{AC} \\ &= (1-t)(a, b) + t^2(0, c) \\ &= ((1-t)a, (1-t)b + t^2c)\end{aligned}$$

よって $P(x, y)$ とすれば

$$\begin{cases} x = (1-t)a & \dots\dots ① \\ y = (1-t)b + t^2c & \dots\dots ② \end{cases}$$

① より $t = 1 - \frac{x}{a}$ を ② に代入して

$$\begin{aligned}y &= \frac{x}{a} \cdot b + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \cdot c \dots\dots ③ \\ &= \frac{c}{a^2}x^2 - \frac{2c-b}{a}x + c\end{aligned}$$

また, $0 < t < 1$ に代入して

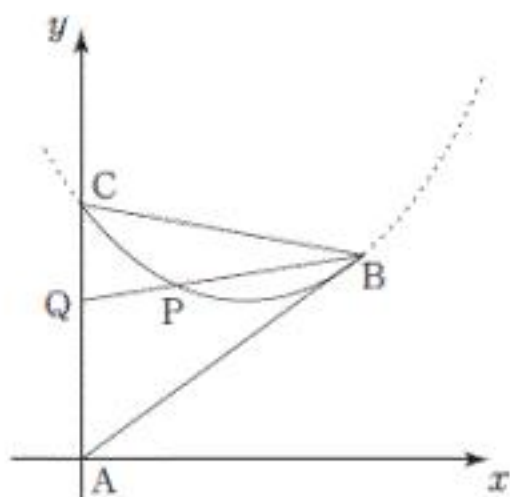
$$0 < 1 - \frac{x}{a} < 1 \quad \therefore \quad 0 < x < a$$

よって, $f(x) = \frac{c}{a^2}x^2 - \frac{2c-b}{a}x + c$ とすると, 点 P の描く曲線は $y = f(x)$ の $0 < x < a$ の部分であり, この部分は

$$f(x) - \frac{b}{a}x = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \cdot c > 0$$

であるから, $y = f(x)$ は線分 AB の上方にある. 題意の面積は, 線分 BC の方程式を $y = g(x)$ として

$$\begin{aligned}\int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx &= \int_0^a \left\{ -\frac{c}{a^2}x(x-a) \right\} dx \\ &= \frac{c}{a^2} \cdot \frac{1}{6}(a-0)^3 \\ &= \frac{1}{6}ac \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{ac}{2} \\ &= \frac{1}{3}S \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$



4 与えられた条件から

$X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$ はすべて 4 以下かつ X_k が 5 以上であり、これについての確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$ である。さらに $k+1$ 回目から n 回目について

(i) $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$ がすべて 5 以上のとき、この確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$ である。

(ii) $k+1 \leq i \leq n$ に対して $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_{i-1}$ がすべて 5 以上かつ $X_i, X_{i+1}, \dots, X_n$ がすべて 4 以下のとき、この確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^{i-k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i+1}$

(i) は (ii) において $i = n+1$ とすれば一致するので、求める確率を p として

$$p = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \left\{ \sum_{i=k+1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i+1} \right\}$$

ここで異なる実数 a, b に対して

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a^{k-1} b^{n-k} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

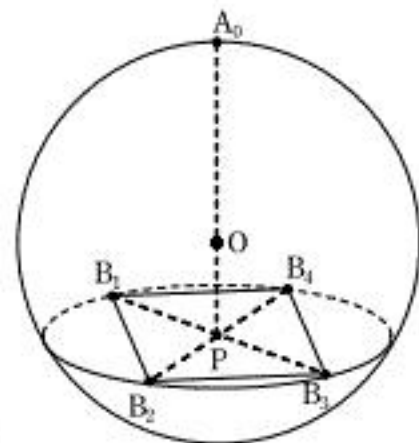
が成立することに注意すると

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k+1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n-k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{j-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1-j} \quad (j = i - k \text{ とした}) \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} \\ &= 3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1} \right\} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+1} \right\} \\ &= n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} \\ &= (n-1) \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

底面の正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を、まず固定し、
 体積を最大にする点 A の位置を考える。
 点 A と底面の距離を最大する点 A であり、
 それを A_0 とおく。点 A_0 と底面の距離を h
 とする。また、球面の中心を O 、
 正方形 $B_1B_2B_3B_4$ の対角線の交点を P とする。



(i) $O=P$ のとき、 O を通り底面に垂直な直線と、球面との交点が A_0 であり、

$$h=1, B_1P=1$$

(ii) $O \neq P$ のとき、 $OP \perp$ 底面であり、 P, O, A_0 はこの順に一直線上にある。

$$OP=p \text{ とすると、 } h=OA_0+OP=1+p$$

また、 $\triangle OB_1P$ に三平方の定理を用いて、

$$B_1P=\sqrt{OB_1^2-OP^2}=\sqrt{1-p^2}$$

(i), (ii) はまとめることができて、

$$0 \leq p < 1, h=1+p, B_1P=\sqrt{1-p^2}$$

また、正方形の面積は、

$$\left(\frac{1}{2}B_1P^2\right) \times 4 = 2(1-p^2)$$

四角錐の体積を V とおくと、

$$V=\frac{1}{3} \times 2(1-p^2) \times (1+p) = \frac{2}{3}(-p^3-p^2+p+1) \quad (0 \leq p < 1)$$

次に p を動かせばよい。 V を p で微分して、

$$V'=\frac{2}{3}(-3p^2-2p+1)=-\frac{2}{3}(p+1)(3p-1)$$

$0 \leq p < 1$ に注意して、

p	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
V'		+	0	-	
V			↗	↘	

また、 $p=\frac{1}{3}$ のとき、 $V=\frac{64}{81}$

よって、

体積の最大値は $\frac{64}{81}$ (答)

$$\begin{cases} (1+i)^n = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\ (1-i)^n = \overline{(1+i)^n} = \overline{(1+i)^n} \end{cases}$$

よって、与式は

$$2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4} > 10^{10} \quad \dots\dots(*)$$

$n=1$ は(*)を満たさない. また, $\cos \frac{n\pi}{4} > 0$ より, m を正の整数として,

$n=8m, 8m \pm 1$ としてよい.

(i) $n=8m$ のとき

$$(*) \quad 2^{4m+1} > 10^{10} \text{ より, } 4m+1 > \frac{10}{\log_{10} 2} = \frac{10}{0.3010}$$

$$\text{ここに, } 33 < \frac{10}{\log_{10} 2} = \frac{10}{0.3010} < 34$$

(*)をみたす最小の m は 9 であり, 最小の n は 72

(ii) $n=8m+1$ のとき

$$(*) \quad 2^{4m+1} > 10^{10}$$

(i)と同様にして, 最小の n は $72+1=73$

(iii) $n=8m-1$ のとき

$$(*) \quad 2^{4m} > 10^{10} \text{ より, } 4m > \frac{10}{\log_{10} 2}$$

(i)と同様にして, 最小の n は $72-1=71$

以上(i) ~ (iii)より,

求める n は $n=\underline{71}$ (答)