

平成 7 年度 入学試験

数

学

代数・幾何
基礎・解析
微分・積分
確率・統計

(注 意)

1. 「問題・解答紙」は指示があるまで開かないこと。
2. 「問題・解答紙」は 5 枚(㊦から㊦まで)ある。
3. 「始め」の合図があったら「問題・解答紙」の番号を確認し、各「問題・解答紙」の 2 箇所に受験番号を記入すること。
4. 解答はすべて「問題・解答紙」のおもてに記入すること。

解 答 紙

(5枚のうち1枚目)

12

〔1〕 次の問いに答えよ。(50点)

〔1〕の採点

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ は $b \neq 0$ を満たすとする。行列 A で表される一次変換 f によって直線 $y = ax$ はそれ自身に移り、また直線 $y = \beta x$ もそれ自身に移るという。 $\alpha \neq \beta$ のとき、この2つの直線 $y = ax$ と $y = \beta x$ とは直交することを証明せよ。

--	--

採 点

--

2. 正の整数 l, m, n で $(l^m)^n > l^{m^n}$ を満たす組 (l, m, n) をすべて求めよ。

採 点

--

解 答 紙

(5枚のうち2枚目)

13

- [2] xyz -空間内に4点 $A(0, 1, 2)$, $B(0, -1, 2)$, $C(0, 0, 1)$, $P(a, b, 3)$ をとる。ただし $a \geq 0$, $b \geq 0$ とする。点 P と点 A, B, C とを結ぶ直線が xy -平面と交わる点をそれぞれ A', B', C' とする。次の問いに答えよ。(50点)

[2] の採点

1. 点 A', B', C' の座標を a, b を用いて表せ。

採点

2. 三角形 $A'B'C'$ が正三角形となる点 $P = P_0$ を求めよ。

採点

3. 点 Q が3点 A, B, C を通る半円周 $y^2 + (z-2)^2 = 1$, $x=0$, $z \leq 2$ 上を動くとき, 2点 P_0, Q を結ぶ直線と xy -平面との交点 Q' の軌跡を求めよ。

採点

解 答 紙

(5枚のうち3枚目)

- 〔3〕 だ円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の第一象限内の部分と、直線 $y = \frac{n\sqrt{3}}{2}x$ および x 軸で囲まれる部分を A_n とし、 A_n の面積を S_n で表す。また、 A_n の内部および周上の点 (x, y) のうち、 x と y がともに整数であるものの総数を T_n で表す。次の問いに答えよ。(50点)

〔3〕の採点

1. T_n, S_n を求めよ。

採 点

2. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。

採 点

解 答 紙

(5 枚のうち 4 枚目)

〔4〕 曲線 $y = f(x)$ ($x > 0$) 上の任意の点 $(t, f(t))$ における接線は y 軸と点 $(0, (t^2 - 1)f(t))$ で交わるという。次の問いに答えよ。(50 点)

1. 関数 $y = f(x)$ の満たす微分方程式を求めよ。

--	--

採 点

--

2. 曲線 $y = f(x)$ が点 $(1, 1)$ を通るとき、関数 $f(x)$ を求めよ。

採 点

--

3. 上に求めた関数 $f(x)$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

採 点

--

解 答 紙

(5枚のうち5枚目)

16

- 〔5〕 A, B どちらの袋にも、赤球と白球が1個ずつ入っているとして、次の操作を行う。2つの袋から無作為に1個ずつ取り出し、同じ色なら2つとも A の袋に入れ、異なる色なら2つとも B の袋に入れる。この操作をどちらかの袋の球がなくなるまで続けるとする。 n を自然数とし、 $2n$ 回までこの操作が続いた後、 A の袋に4個の球が入っている確率を p_n 、赤、白の球が1個ずつ入っている確率を q_n 、同じ色の球2個が入っている確率を r_n 、球が入っていない確率を s_n とする。次の問いに答えよ。(50点)

〔5〕の採点

--	--

1. p_1, q_1, r_1, s_1 を求めよ。

採 点

--

2. $n \geq 2$ のとき、 p_n, q_n, r_n, s_n を q_{n-1}, r_{n-1} を用いて表せ。

採 点

--

3. p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。

採 点

--