

平成 8 年 度 入 学 試 験

数

学

代数・幾何
基礎解析
微分・積分
確率・統計

(注 意)

1. 「問題・解答紙」は指示があるまで開かないこと。
2. 「問題・解答紙」は 5 枚(12から16まで)ある。
3. 「始め」の合図があったら「問題・解答紙」の番号を確認し、各「問題・解答紙」の 2 箇所に受験番号を記入すること。
4. 解答はすべて「問題・解答紙」のおもてに記入すること。

問題・解答紙

(5枚のうち1枚目)

〔1〕 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ に対して, 行列 $B^{-1}AB$ が表す一次変換を f とする。

〔1〕の採点

ただし, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ である。次の問いに答えよ。(50点)

1. 点 $P(\sin \theta, \cos \theta)$ の f による像を求めよ。

採 点

2. f が直線 $y = x$ をそれ自身に移すとき, θ の値を求めよ。

採 点

3. 上で求めた θ に対して, f は原点を通るある直線に関する対称移動であることを示し, その直線の方程式を求めよ。

採 点

問題・解答紙

(5 枚のうち 2 枚目)

- 〔2〕 原点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし、 $P(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ を S 上の点とする。点 P を通る平面 α 〔2〕の採点
に対して S と α が交わってできる円周を C とする。次の問いに答えよ。(50 点)

1. 平面 α 上での点 P における C の接線 l は、ベクトル $\overrightarrow{OP}$ に直交することを示せ。

採 点

2. 球面 S と点 P で接する平面を β とする。平面 β と xy 平面とのなす角を θ として、 $\cos \theta$ を求めよ。

採 点

3. 平面 α が点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$ を通り、さらに直線 l と xy 平面とのなす角が上で求めた θ であるとする。
このとき、平面 α の方程式を求めよ。

採 点

問題・解答紙

(5枚のうち3枚目)

〔3〕 自然数 $n > 1$ に対して $a_n = \log[(n-1)!] + \frac{1}{2} \log n$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

〔3〕の採点

1. 曲線 $y = \log x$ 上の点 $(k, \log k)$ における接線と 2 直線 $x = k - \frac{1}{2}$ と $x = k + \frac{1}{2}$, および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし, $k \geq 2$ とする。

採 点

2. $\log[(n-1)!] > (n - \frac{1}{2})\log(n - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2} \log(\frac{3}{2}) - (n - 2)$ を示せ。

採 点

3. $a_n > n \log n - n + \frac{3}{2} [1 - \log(\frac{3}{2})]$ を示せ。

採 点

問題・解答紙

(5枚のうち4枚目)

- 〔4〕 1から9までの数字が1つずつ書いてあるカードが、それぞれ1枚ずつ、合計9枚ある。これらを3枚ずつの3つのグループに無作為に分け、それぞれのグループから最も小さい数の書かれたカードを取り出す。次の問いに答えよ。(50点)

〔4〕の採点

--	--

1. 取り出された3枚のカードの中に4が書かれたカードが含まれている確率を求めよ。

採 点

--

2. 取り出された3枚のカードに書かれた数字の中で4が最大である確率を求めよ。

採 点

--

問題・解答紙

(5 枚のうち 5 枚目)

〔5〕 0 と 1 を有限個並べたものを語ということにする。語の例としては 0, 010, 00101, 100110 などがある。いま 2 つの語 $A = 1$, $B = 10$ をもとにして

$$C_1 = A, C_2 = B, C_n = C_{n-2}C_{n-1}C_{n-2}, (n \geq 3)$$

のように定める。例えば, $C_3 = 1101$ である。次の問いに答えよ。(50 点)

1. $n \geq 3$ のとき, 語 C_n に対して, 最初, または最後の数字を 1 個か 2 個取りさると, 残りは同じ語が循環して現れている。このことを数学的帰納法により示せ。

〔5〕の採点

--	--

採 点

--

2. 語 C_n に現れる 0 の個数を a_n とし, 1 の個数を b_n とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

採 点

--