平 成 9 年 度 入 学 試 験

数　　学　数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B

（注 意 事 項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，4枚（$\boxed{8}$ から $\boxed{11}$ まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁及び，解答紙の不足等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に各「解答紙」の2個所に受験番号を記入しなさい。
5. 選択問題については，選択した問題符号を「解答紙」の定められた場所に必ず記入しなさい。
6. 解答はすべて「解答紙」のおもてに記入しなさい。
7. 文学部については，配点は表示されているものの $\frac{1}{2}$ です。
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰って下さい。

〔1〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{8}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

2 定点 O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 2)$と円$(x-2)^2+(y-2)^2=4$の周上を動く点 P がある。

(1) 3 点 O，A，P が同一直線上にあるとき，A と異なる点 P の座標を求めよ。

(2) 3 点 O，A，P が同一直線上にないとき，△OAP の重心の軌跡を求めよ。

(3) 3 点 O，A，P が同一直線上にないとき，△OAP の面積の最大値を求めよ。

〔2〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{9}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

関数 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a \neq 0)$について，次の各問に答えよ。

(1) xの値がpからqまで変化するとき，関数$f(x)$の平均変化率を求めよ。ただし，$p<q$とする。

(2) $f(x)$の$x=r$における微分係数$f'(r)$を定義にしたがって求めよ。

(3) (1)の平均変化率と，(2)の$f'(r)$が一致するとき，rをp，qを用いて表せ。

(4) $f(x)=x^2$とする。このとき，放物線$y=x^2$上の2点$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$における接線と放物線で囲まれる図形の面積を求めよ。ただし，$p<q$とする。

〔3〕（配点50点）

次の問 $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ より1問を選択し，解答紙 $\boxed{10}$ の $\boxed{}$ に選択した問題符号ア，イ，ウのいずれかを記入して解答しなさい。

$\boxed{ア}$

(1) $2^m \leqq 4m^2$ であるが，$2^{m+1} > 4(m+1)^2$ である最小の自然数 m を求めよ。

(2) m を(1)で求めた自然数とする。そのとき $m < n$ をみたすすべての自然数 n について，$4n^2 < 2^n$ が成り立つことを示せ。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 4k^2$ とする。n を動かしたときの S_n の最小値を求めよ。

$\boxed{イ}$

次の命題(1)，(2)，(3)について，真のときは証明を与え，偽のときは反例を与えよ。

(1) x，y を実数とする。

$|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$ ならば，$(x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$ である。

(2) a，b，c を実数とする。

すべての実数 x について $ax^2 + bx + c > 0$ ならば，$b^2 - 4ac < 0$ である。

(3) a を整数とする。

2次方程式 $x^2 + 3x + a = 0$ が有理数の解をもつならば，a は偶数である。

$\boxed{\text{ウ}}$

(1) 次の $\boxed{}$ の中をうめよ。(解答では，例えば，あ＝…と記せ。)

① 2直線 a，b が1点Pで交わるとき a，b 上にない点Xについて，Xから a，b にそれぞれ垂線XJ，XKをひく。ただし，J，KはPと異なるとする。このとき，Xが∠JPKの2等分線上にあるための必要十分条件は，XJ＝ $\boxed{\text{あ}}$ が成り立つことである。

② 2点C，Dに対し，点Xが線分CDの垂直二等分線上にあるための必要十分条件は，$\boxed{\text{い}}$ ＝ $\boxed{\text{う}}$ が成り立つことである。

(2) △ABCの∠Aの2等分線とこの三角形の外接円との交点でAと異なる点をDとおく。

① 線分AD上にDB＝DXとなる点Xをとると，Xより辺BC，ABにひいた垂線の長さは等しいことを示せ。

② 線分ADのDの方向への延長上にある点Yから直線BC，ABにひいた垂線の長さが等しいならば，Dは線分XYの中点となることを示せ。

〔 4 〕（配点 50 点）

次の問 $\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ より 1 問を選択し，解答紙 $\boxed{11}$ の $\boxed{}$ に選択した問題符号**カ**，**キ**，**ク**のいずれかを記入して解答しなさい。

$\boxed{カ}$

△OAB において，点 G を $\overrightarrow{OG}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ である点とする。また，2 点 P，Q を $\overrightarrow{OP}=p\,\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=q\,\overrightarrow{OB}$（$0<p<1$，$0<q<1$）である点とする。

(1) 点 G が△OAB の内部にあるとき，k のみたすべき条件を求めよ。

ただし，△OAB の内部とは，△OAB で囲まれる部分からその周を除いた部分をさす。

(2) △OAB と△OPQ の面積をそれぞれ S，S' とするとき，$\dfrac{S'}{S}$ を p，q を用いて表せ。

(3) 3 点 G，P，Q が同一直線上にあるとき，k を p，q を用いて表せ。

(4) $k=\dfrac{1}{4}$ であって，3 点 G，P，Q が同一直線上にあるとき，$\dfrac{S'}{S}$ の最小値を求めよ。

$\boxed{キ}$

複素数平面において，点 z に関する次の条件を考える。

「原点と異なる点 α を中心として点 z を角 θ だけ回転すると，移った点の絶対値が α の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる」

(1) $\alpha=i$，$\theta=90^\circ$ のとき，上の条件をみたす点 z の全体はどんな図形となるか。

(2) （α，θ）を一組固定したとき，上の条件をみたす点 z の全体はどんな図形となるか。

(3) 点 α が実軸上にあるとき，(2)の図形が虚軸に接するのは θ が何度のときか。ただし，$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ とする。

$\boxed{ク}$

赤玉２球，白玉８球が入った袋がある。この袋から玉を同時に２球取りだし，赤玉は手元に置き，白玉は袋に返すという試行を繰り返す。n 回の試行の後，袋に赤玉が２球残っている確率を p_n，１球残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) q_2 を求めよ。

(3) p_n，q_n を p_{n-1}，q_{n-1} を用いて表せ。ただし，$n \geqq 2$ とする。