平成9年度入学試験

数　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

（注意事項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚（$\boxed{12}$ から $\boxed{16}$ まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁及び，解答紙の不足等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に各「解答紙」の2個所に受験番号を記入しなさい。
5. 選択問題については，選択した問題符号を「解答紙」の定められた場所に必ず記入しなさい。
6. 解答はすべて「解答紙」のおもてに記入しなさい。
7. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰って下さい。

〔1〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{12}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = r(t)\cos t,\quad y = r(t)\sin t$$

で与えられている。ただし，$r(t) = 1 + \cos t$ であるとする。

(1) $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で，点Pの速さ（速度の大きさ）が 1 となる時刻を求めよ。

(2) $0 \leqq t \leqq 2\pi$ の間に，点Pが動いた道のりを求めよ。

(3) 点Pが $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で描く曲線と x 軸，y 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

〔 2 〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{13}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

m を正の定数とし，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき，$x \geqq 0$ において関数 $u(x)$，$v(x)$，$f(x)$，$g(x)$ を

$$u(x)=\int_0^x S(t)dt+m, \quad v(x)=\int_0^x tS(t)dt+m,$$

$$f(x)=\frac{v(x)}{u(x)}, \quad g(x)=v(x)-xu(x)$$

とおく。

(1) $g(0)>0$，$g(1)<0$ および $x>0$ において $g'(x)<0$ を示せ。

(2) $f(x)=x$ をみたす x の値がただ一つ存在することを示せ。

(3) $f(x)=x$ をみたす x の値を a とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ。

〔3〕（配点 50 点）

次の問 $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ より1問を選択し，解答紙 $\boxed{14}$ の $\boxed{}$ に選択した問題符号ア，イ，ウのいずれかを記入して解答しなさい。

$\boxed{ア}$

(1) $2^m \leqq 4m^2$ であるが，$2^{m+1} > 4(m+1)^2$ である最小の自然数 m を求めよ。

(2) m を(1)で求めた自然数とする。そのとき $m < n$ をみたすすべての自然数 n について，$4n^2 < 2^n$ が成り立つことを示せ。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 4k^2$ とする。n を動かしたときの S_n の最小値を求めよ。

$\boxed{イ}$

次の命題(1)，(2)，(3)について，真のときは証明を与え，偽のときは反例を与えよ。

(1) x，y を実数とする。

$|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$ ならば，$(x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$ である。

(2) a，b，c を実数とする。

すべての実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ならば，$b^2-4ac<0$ である。

(3) a を整数とする。

2次方程式 $x^2+3x+a=0$ が有理数の解をもつならば，a は偶数である。

$\boxed{\text{ウ}}$

(1) 次の $\boxed{}$ の中をうめよ。(解答では，例えば，あ＝…と記せ。)

① 2直線 a，b が1点Pで交わるとき a，b 上にない点Xについて，Xから a，b にそれぞれ垂線XJ，XKをひく。ただし，J，KはPと異なるとする。このとき，Xが∠JPKの2等分線上にあるための必要十分条件は，XJ＝ $\boxed{\text{あ}}$ が成り立つことである。

② 2点C，Dに対し，点Xが線分CDの垂直二等分線上にあるための必要十分条件は， $\boxed{\text{い}}$ ＝ $\boxed{\text{う}}$ が成り立つことである。

(2) △ABCの∠Aの2等分線とこの三角形の外接円との交点でAと異なる点をDとおく。

① 線分AD上にDB＝DXとなる点Xをとると，Xより辺BC，ABにひいた垂線の長さは等しいことを示せ。

② 線分ADのDの方向への延長上にある点Yから直線BC，ABにひいた垂線の長さが等しいならば，Dは線分XYの中点となることを示せ。

〔４〕（配点 50 点）

次の問 $\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ より１問を選択し，解答紙 $\boxed{15}$ の $\boxed{}$ に選択した問題符号**カ**，**キ**，**ク**のいずれかを記入して解答しなさい。

$\boxed{\text{カ}}$

四面体 OABC において，点 G を $\overrightarrow{OG} = k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ である点とする。また，3 点 P，Q，R を，$\overrightarrow{OP} = p\,\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ} = q\,\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR} = r\,\overrightarrow{OC}$（$0 < p < 1$，$0 < q < 1$，$0 < r < 1$）である点とする。

(1) 点 G が四面体 OABC の内部にあるとき，k のみたすべき条件を求めよ。ただし，四面体の内部とは，四面体からその表面を除いた部分をさす。

(2) 四面体 OABC と四面体 OPQR の体積をそれぞれ V，V' とするとき，$\dfrac{V'}{V}$ を p，q，r を用いて表せ。

(3) 4 点 G，P，Q，R が同一平面上にあるとき，k を p，q，r を用いて表せ。

(4) $p = 3k = \dfrac{1}{2}$ であって，4 点 G，P，Q，R が同一平面上にあるとき，$\dfrac{V'}{V}$ の最小値を求めよ。

$\boxed{\text{キ}}$

複素数平面において，点 z に関する次の条件を考える。

「原点と異なる点 α を中心として点 z を角 θ だけ回転すると，移った点の絶対値が α の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる」

(1) $\alpha = i$，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，上の条件をみたす点 z の全体はどんな図形となるか。

(2) $(\alpha,\ \theta)$ を一組固定したとき，上の条件をみたす点 z の全体はどんな図形となるか。

(3) 点 α が実軸上にあるとき，(2)の図形が虚軸に接するときの θ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

$\boxed{ク}$

n 個の袋があり，それぞれの袋には金色のカード 3 枚と銀色のカード $(3n-3)$ 枚入っている。それぞれの袋から 1 枚ずつカードを抜き出すとき，確率変数 X_n を抜き出された金色のカードの枚数とおく。

(1) X_4 が値 3 をとる確率 $P(X_4=3)$，および値 2 をとる確率 $P(X_4=2)$ を求めよ。

(2) 金色のカードを 1 枚抜き出すごとに賞金 100 円を受け取る。$n=4$ のときに受け取る賞金の期待値を求めよ。

(3) 一般の n $(n \geqq 3)$ について，X_n が値 3 をとる確率 $P(X_n=3)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(X_n=3)$ を求めよ。

〔 5 〕（配点 50 点）

次の問 $\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$ より 1 問を選択し，解答紙 $\boxed{16}$ の $\boxed{}$ に選択した問題符号サ，シ，スのいずれかを記入して解答しなさい。

$\boxed{サ}$

a，b を与えられた実数とする。

(1) 方程式 $ax = b$ がただ一つの解をもつときの条件を述べよ。

また，この方程式が無数の解をもつときの条件および，解をもたないときの条件を述べよ。

(2) 連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2a+3 & 3 & -2 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がただ一つの解をもつときの a の条件を求め，このときの解を求めよ。

(3) (2)の連立一次方程式が無数の解をもつときの a の条件を求めよ。さらに，このときの解を $x = u$，$y = v$，$z = w$ とするとき，v，w を u で表せ。

(4) (2)の連立一次方程式が解をもたないときの a の条件を求めよ。

$\boxed{シ}$

双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a,\ b > 0)$$

の接線 $y = mx + n$ にこの双曲線の焦点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c > 0)$ より垂線 FH，$\mathrm{F'H'}$ をひく。

(1) n を m で表せ。

(2) H，H' は，原点 O を中心とする半径 a の円周上にあることを示せ。

(3) 原点 O から接線 $y = mx + n$ への距離を t とするとき，$\triangle\mathrm{HOH'}$ の面積 S を t で表せ。さらにこの接線を動かすとき，t のとり得る範囲および S の最大値を求めよ。

$\boxed{ス}$

正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$（k は2以上の整数）の近似値を求めるため

$$f(x)=x^k-c,\quad g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\quad (x>0)$$

とおき，

$$\sqrt[k]{c}<a_1,\ a_{n+1}=g(a_n),\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

とする。

(1) $\sqrt[k]{c}<a_n$ ならば，$\sqrt[k]{c}<a_{n+1}<a_n$ を示せ。

(2) $k=3$ のとき，$\sqrt[3]{c}<a_n$ ならば，$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$ を示せ。

(3) $k=3$，$c=2$，$a_1=1.3$ のとき，$a_5-\sqrt[3]{2}<\dfrac{1}{2^5\cdot 10^{16}}$ を示せ。