

平成10年度入学試験

数

学

数学Ⅰ, 数学A
数学Ⅱ, 数学B

(注意事項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は、12 ページあります。
また、中にはさみ込まれている解答紙は、4 枚(8 から 11 まで)です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁及び、解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に各「解答紙」の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 選択問題については、定められた「解答紙」の定められた場所(2 箇所)に、選択した問題符号を記入してから解答しなさい。
6. 解答はすべて「解答紙」のおもてに記入しなさい。
7. 文学部については、配点は表示されているものの $\frac{1}{2}$ です。
8. 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰って下さい。

数

学

数学 I, 数学 A
数学 II, 数学 B

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 8 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

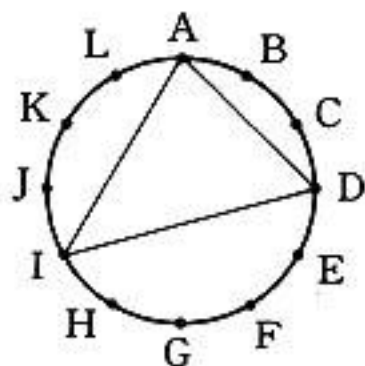
放物線 $y = x^2 - 2px$ 上の点 $(t, t^2 - 2pt)$ における接線を y 軸方向に b だけ平行移動した直線を $l(t, b)$ とする。

- (1) 直線 $l(t, b)$ の方程式を求めよ。
- (2) この放物線と直線 $l(t, b)$ とが、 x 座標が正の 2 点で交わるための t, b の範囲を求めよ。
- (3) 放物線と直線 $l(t, b)$ とが 2 点で交わるとき、これらが囲む図形の面積 S を求めよ。
- (4) (3)の図形の面積 S を直線 $x = u$ で 2 等分したい。 u を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 9 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕



左図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。

これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる。たとえば, A, D, I を選べば, 図のような三角形がえられる。

このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
- (4) 3 点を選んでえられる三角形のうち, 互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

〔3〕 (配点 50 点)

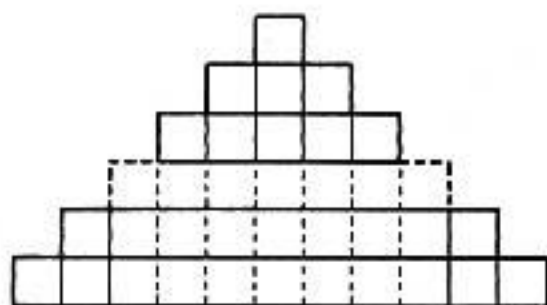
次の問 **A** , **B** , **C** より 1 問を選択し、解答紙 **10** の (2 箇所) に選択した問題符号 A, B, C のいずれかを記入して解答しなさい。

A

- (1) $x \geq y \geq 0$ のとき、不等式 $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。
- (2) ① 不等式 $\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。
- ② ①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。

B

- (1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ について、次の等式が成り立つことを示せ。
- $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$
- (2) 辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して、辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。
- ① $m = 2, 3, 4$ のとき、どのようにタイル張りすれば良いか図示せよ。
- ② 一般に、辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し、その式が成り立つ理由を述べよ。
- (3) 辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して、すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ、高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき下図のように見えたという。ただし、図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。



C

次の BASIC によるプログラムを実行するとき、以下の問に答えよ。

```
10  INPUT  N
20  S = 0
30  M = 2 * INT(N / 2) + 1
40  FOR  K = 1  TO  M  STEP 2
50  X = N - K * INT(N / K)
60  IF  X > 0  THEN  GOTO  80
70  S = S + K
80  NEXT  K
90  PRINT  S
100 END
```

- (1) 入力が 12 のとき出力はいくらか。
- (2) 出力が 1 となるような自然数の入力はどのような数か。
- (3) 範囲 $2 \leq N \leq 50$ の自然数 N を入力するとき、出力が 1 より大きな奇数となる N をすべて求めよ。

[4] (配点 50 点)

次の問 **D** , **E** , **F** より 1 問を選択し、解答紙 **11** の ☐ (2 箇所) に選択した問題符号 **D** , **E** , **F** のいずれかを記入して解答しなさい。

D

辺の長さ 1 の正四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおき、線分 OA を $m:n$ に内分する点を P 、線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q 、線分 CO を $m:n$ に内分する点を R 、線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。(ただし、 $m, n > 0$ とする。)

- (1) ① $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。
- ② $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を求めよ。
- ③ $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{RS}$ が垂直かどうかを調べよ。
- (2) ① $m = n$ のとき点 P , Q , R , S は同一平面上にあることを示せ。
- ② このとき PQ , RS の交点を G として、 $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。
- ③ G は正四面体 $OABC$ に外接する球の中心であることを示し、その球の半径を求めよ。

E

k を正の実数とすると、方程式

$$x^3 - (2k + 1)x^2 + (4k^2 + 2k)x - 4k^2 = 0$$

の 3 個の解を z_1 , z_2 , z_3 とし、それらを複素数平面上の点と見なす。

- (1) $x = 1$ は上の方程式の解であるかどうかを調べよ。
- (2) 3 点 z_1 , z_2 , z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。
- (3) 3 点 z_1 , z_2 , z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。
- (4) 3 点 z_1 , z_2 , z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転してえられる 3 点を w_1 , w_2 , w_3 とする。 w_1 , w_2 , w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}$, $\overline{w_2}$, $\overline{w_3}$ とが、原点中心の正六角形の頂点となるときの、 k および $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ の値を求めよ。

F

1 から n までの数字を書いた玉がそれぞれ 2 個ずつ、全部で $2n$ 個入っている袋がある。この袋から 2 個の玉を同時に取り出すことを考える。取り出した玉の数字の大きい方を X 、小さい方を Y とする。ただし同じ数字のときはその数字を X および Y (すなわち $X = Y$) とする。

- (1) 確率 $P(X \leq k)$ および $P(Y \geq k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を求めよ。
- (2) 確率 $P(X = k)$ および $P(Y = k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を求めよ。
- (3) $n = 4$ のとき $X - Y$ の期待値 $E(X - Y)$ を求めよ。
- (4) 一般の n について $X + Y$ の期待値 $E(X + Y)$ を求めよ。