平成10年度入学試験

数　　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

（注意事項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚（$\boxed{12}$ から $\boxed{16}$ まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁及び，解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に各「解答紙」の2箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 選択問題については，定められた「解答紙」の定められた場所（2箇所）に，選択した問題符号を記入してから解答しなさい。
6. 解答はすべて「解答紙」のおもてに記入しなさい。
7. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰って下さい。

数　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

〔１〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{12}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

以下において，$f(x)$はすべての実数xにおいて微分可能な関数とし，$F(x)=e^x f(x)$とおく。

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で

条件(A) 「すべてのxに対して $f(x+1)=f(x)$ である」

をみたすものの例をあげよ。

(2) 関数 $f(x)$ が

条件(B) 「すべてのxに対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である」

をみたすとき，$a<b$ ならば$F(a)\geqq F(b)$であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が(1)の条件（A）をみたすとき，$F(x+n)$（ただし，nは正の整数）を$F(x)$を用いて表せ。

(4) 関数 $f(x)$ が(1)，(2)の条件（A），（B）をともにみたすとする。

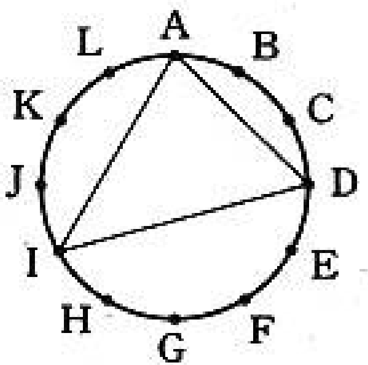
① $f(c)\geqq 0$となるcが存在すれば，$f(c)=0$であることを示せ。

② あるcで $f(c)=0$であれば，すべてのxで $f(x)=0$となることを示せ。

〔2〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{13}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕



左図のように円周を 12 等分する点 A，B，C，D，E，F，G，H，I，J，K，L が与えられている。

これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる。たとえば，A，D，I を選べば，図のような三角形がえられる。

このとき，次の問に答えよ。

(1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(4) 3 点を選んでえられる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

〔 **3** 〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{14}$ の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて

$$x=\sin t-t\cos t,\quad y=\cos t+t\sin t\ (0\leqq t\leqq \pi)$$

で与えられている。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。

(2) 曲線 C 上の各点 P において，P における接線と P で直交する直線を考える。この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は，P を動かすときどんな図形を描くか。

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt$ を求めよ。

(4) 曲線 C と y 軸および直線 $y=-1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

〔 4 〕（配点 50 点）

次の問 $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ より1問を選択し，解答紙 $\boxed{15}$ の $\boxed{}$（2箇所）に選択した問題符号 A，B，C のいずれかを記入して解答しなさい。

$\boxed{\text{A}}$

(1) $x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2) ① 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|} + \dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$
が成り立つことを示せ。

② ①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。

$\boxed{\text{B}}$

(1) 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

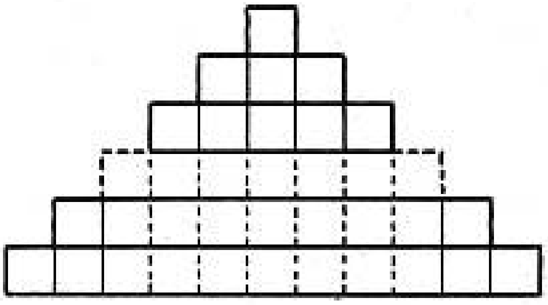
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2) 辺の長さ1の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

① $m = 2, 3, 4$ のとき，どのようにタイル張りすれば良いか図示せよ。

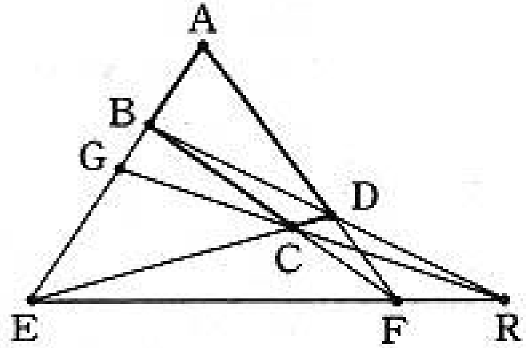
② 一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

(3) 辺の長さ1の正三角形を底面とする高さ1の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ1の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき下図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ1の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。



C

右図のような四角形ABCDにおいて，直線ABと直線CDの交点E，直線BCと直線ADの交点F，直線BDと直線EFの交点R，直線RCと直線ABの交点Gがえられたとする。



(1) $\dfrac{BG}{GE}=\dfrac{BA}{AE}$ が成り立つことを示せ。

(2) GがAEの中点で，$\dfrac{AD}{DF}=2$ であるとき，$AB=a$，$CD=b$ とおく。次の条件をみたす x，y，z の値を求めよ。

① $EB=xa$

② $EC=yb$

③ 四角形ABCDが円に内接するとき，$a=zb$

〔 5 〕（配点 50 点）

次の問 $\boxed{\text{D}}$，$\boxed{\text{E}}$，$\boxed{\text{F}}$，$\boxed{\text{G}}$ より 1 問を選択し，解答紙 $\boxed{16}$ の $\boxed{}$（2 箇所）に選択した問題符号 D，E，F，G のいずれかを記入して解答しなさい。

$\boxed{\text{D}}$

辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。（ただし，m，$n>0$ とする。）

(1) ① $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

② $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が垂直かどうかを調べよ。

(2) ① 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるときの m，n の関係を求めよ。

② このとき PQ，RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

③ G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。

$\boxed{\text{E}}$

k を実数とするとき，方程式

$$x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$$

の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点と見なす。

(1) z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。

(2) z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。

(3) 3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転してえられる 3 点を w_1，w_2，w_3 とする。w_1，w_2，w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ とが原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および $\theta(0\leqq\theta\leqq\pi)$ の値を求めよ。

F

3桁の自然数 $N = 100a + 10b + c$（a, b, c は，$1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$，$0 \leqq c \leqq 9$ をみたす整数）を考える。

(1) 平方数かつ奇数である N で，2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接するようなものをすべて求めよ。

(2) 命題「N および a が平方数のとき2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と接する。」

は正しいか。正しければそれを示し，正しくなければ反例をあげよ。

(3) ある N について，2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは座標が整数である相異なる2点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が4となる。このときの N を求めよ。

G

(1) 平面上に半径が R，r（$R > r$）の2円があり，それらの中心間の距離が l であるとする。これらの2円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R，r，l を用いて表せ。

(2) 座標平面上で x 軸を準線とし，定点 A$(0,\ a)$ を通る放物線について考える。ただし，$a > 0$ とする。

① そのような放物線の焦点 F$(s,\ t)$ の全体はどのような図形を描くか。

② x 軸上にない点 P$(p,\ q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。