

平成 11 年 度 入 学 試 験

数

学

数学Ⅰ, 数学A
数学Ⅱ, 数学B
数学Ⅲ, 数学C

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子、解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は、12 ページあります。
また、中にはさみ込まれている解答紙は、5 枚(12 から 16 まで)です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し、問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に各「解答紙」の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 選択問題については、定められた「解答紙」の定められた場所(2 箇所)に、選択した問題符号を記入してから解答しなさい。
6. 解答はすべて「解答紙」のおもてに記入しなさい。
7. 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰って下さい。

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 12 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

m を 2 以上の自然数, e を自然対数の底とする。

- (1) 方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ をみたす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ。またその値を c とするとき, $m - 1 < c < m$ となることを示せ。
- (2) $x > 0$ の範囲で $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ。
- (3) a_m を (2) で求められる $f(x)$ の最小値とするととき, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$ を求めよ。

〔2〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 13 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし、高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を ℓ とする。直円錐の頂点を C, 底面の中心を O とし以下の間に答えよ。

- (1) 直円錐の展開図をもちいて ℓ の長さを求めよ。
- (2) ℓ 上の点 P に対して、線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。

$\angle AOQ = \theta$ として CP^2 を $\sin \theta$ で表せ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

- (3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし、A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ の範囲で $\frac{OS^2}{OR^2}$ の最大値を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 14 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

(1) 実数 $k \geq 0$ に対し、

$$\int_0^{2\pi} \left\{ y(x \cos \theta + \frac{1}{2} x^2) - (x \cos \theta + \frac{1}{2} x^2)^2 \right\} \cos \theta d\theta = 2k\pi$$

をみたす xy 平面内の曲線の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた曲線と直線 $y = a$ との共有点が 1 個であるような実数 a の範囲を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

次の問 **A** , **B** , **C** より 1 問を選択し, 解答紙 **15** の ☐ (上欄左右にある 2 箇所) に選択した問題符号 **A** , **B** , **C** のいずれかを記入して解答しなさい。

A

関数 $f(x) = 1 - x^2$ について, 次の問に答えよ。

(1) $f(a) = a$ をみたす正の実数 a を求めよ。

(2) a を (1) で求めた実数とする。

$$x \geq \frac{1}{2} \text{ ならば,}$$

$$|f(x) - f(a)| \geq \frac{\sqrt{5}}{2} |x - a|$$

となることを示せ。

(3) a を (1) で求めた実数とする。

$$\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \text{ として,}$$

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ がなりたつならば, $x_1 = a$ であることを示せ。

B

実数 a, b は $0 < a < b$ をみたすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a + 2b}{3}, \quad \sqrt{ab}, \quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2 + ab + b^2)}{3}}$$

次の (1), (2) では, それぞれ, その目的を実行するための BASIC によるプログラムの始めの部分が与えられている。方針を記述してから, プログラムの残りの部分を完成せよ。ただし, 変数 $A(1)$, $A(2)$ 等には座標 a_1 , a_2 等が入力されるものとする。

注意: (1) のプログラムでは配列を表すために DIM 文を使っているが, DIM 文を使わないプログラムを作成してもよい。そのときは, 行番号 10 の文は消去し, 行番号 20, 30 の文は

```
20 INPUT A 1, A 2
```

```
30 INPUT P 1, P 2
```

で置き換えるものとする。(2) についても, 同様である。

- (1) 座標平面上の原点 O と異なる点 $A(a_1, a_2)$ について, 任意の点 $P(p_1, p_2)$ から直線 OA への距離を表示すること。

```
10 DIM A(2), P(2)
```

```
20 INPUT A(1), A(2)
```

```
30 INPUT P(1), P(2)
```

- (2) 点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ を座標平面上の相異なる点とし, 直線 AB で平面を二分する。点 $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$ がこの直線の同じ側にあるときは 1 を, 異なる側にあるときは -1 を, P , Q の少なくとも一方がこの直線上にあるときは 0 を表示すること。ただし, ある点と直線との距離が, 与えられた正数 0.00001 より小さいときはその点は直線上にあるとみなすことにする。

```
10 DIM A(2), B(2), P(2), Q(2)
```

```
20 EPS = 0.00001
```

```
30 INPUT A(1), A(2)
```

```
40 INPUT B(1), B(2)
```

```
50 INPUT P(1), P(2)
```

```
60 INPUT Q(1), Q(2)
```

[5] (配点 50 点)

次の問 **D** , **E** , **F** より 1 問を選択し, 解答紙 **16** の ☐ (上欄左右にある 2 箇所) に選択した問題符号 **D** , **E** , **F** のいずれかを記入して解答しなさい。

D

A, B の 2 名で次のゲームを行う。A, B はそれぞれ表に 1 から n までの数字がひとつずつ書かれた n 枚のカードを持っている(裏には何も書かれていない)。A は自分のすべてのカードを表を下にしてならべる。B は, A がならべたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして 1 枚ずつならべる。次に A のカードを表向きにし, B は数字が一致したカードの枚数だけ得点を得る。確率変数 X を B が 1 回のゲームで得る点数とするととき次の問に答えよ。

- (1) $n = 5$ のとき確率 $P(X = 2)$ を求めよ。
- (2) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率を p とする。

$$p = \sum_{k=1}^n a_k P(X = k)$$

と表すとき, a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) を求めよ。

- (3) 期待値 $E(X)$ を求めよ。

E

k を実数として, 2 次方程式 $x^2 + 2kx + 3k = 0$ の 2 つの解を α, β ($\alpha \neq \beta$) とする。 i を虚数単位として次の問に答えよ。

- (1) $|\alpha - i|^2 + |\beta - i|^2$ の値を k を用いて表せ。
- (2) 複素数平面において, 複素数 α, β, i を表す点をそれぞれ A, B, P とする。 $\angle APB$ が直角になるような k の値を求めよ。

大きさ 1 の空間ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{1}{2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

をみたすように与えられているとする。また空間ベクトル $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ が

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{d} = 0,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{e} = 1, \quad \vec{c} \cdot \vec{e} = 0,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{f} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{f} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{f} = 1$$

をみたすとき、点 $D(\vec{d})$, $E(\vec{e})$, $F(\vec{f})$ および原点 O について次の問に答えよ。

- (1) $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ となるような実数 x , y , z を求めよ。同様に $\vec{f}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。
- (2) ベクトル $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{d} - \vec{f}$ の大きさを求めよ。
- (3) 三角形 ODF の面積を求めよ。
- (4) 四面体 $ODEF$ の体積を求めよ。