

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 8 の定められた場所に記入しなさい.

〔問題〕

関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える.

- (1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ.
- (2) $a = 0$ のとき、関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ.
- (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ.

〔 2 〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙

9

 の定められた場所に記入しなさい．

〔問題〕

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする．

- (1) xy 平面上の点 (p, q) に関する，点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ．
- (2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ．
- (3) y 軸に平行な直線 $x = p$ に関する，点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ．
- (4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ．

〔 3 〕 (配点 50 点)

次の問 **A** , **B** , **C** より 1 問を選択し, 解答紙 **10** の ☐ (2 個所) に選択した問題符号 **A** , **B** , **C** のいずれかを記入してから解答しなさい.

A

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える. $a_1, \dots, a_n$ の積を P_n とおく.

- (1) 各 n について $a_n > 0$ であることを示せ.
- (2) 各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ であることを示せ.

(3)

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

とおく. S_1, S_2, S_3, S_4 を求めよ.

- (4) 各 n について S_n を P_n で表せ.

B

- (1) 自然数 a, b が互いに素であるとはどういうことか.
- (2) 自然数 a, b が互いに素であるなら a^2, b^2 は互いに素であることを示せ.
- (3) n を自然数とする. もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば, $\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ. ただし, 有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである.
- (4) n が自然数のとき, $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ.

C

r を 1 より小さい正の定数とする. 平面上の点 A を端点とする半直線 ℓ 上の点で A からの距離が $1-r$, 1 , $1+r$ となるものをそれぞれ B , C , D とする. BD を直径とする円を描き, A を端点としその円に接する半直線のひとつを m とする. m 上の点で A からの距離が $1-r$, 1 , $1+r$ となるものをそれぞれ E , F , G とする. E , F を通り ℓ に接する円を描きその接点を P とする. また F , G を通り ℓ に接する円を描きその接点を Q とする.

- (1) A と P との間の距離 AP を r で表せ.
- (2) CF を r で表せ.
- (3) $PQ = CF$ を示せ.

〔 4 〕（配点 50 点）

次の問 **D** , **E** , **F** より 1 問を選択し、解答紙 **11** の ☐（2 箇所）
に選択した問題符号 D, E, F のいずれかを記入してから解答しなさい。

D

複素数平面上の点 z を考える.

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき、どのような図形を描くか. ただし、 $\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す.

- (2) 0 でない複素数 d に対して

$$dz(\bar{z} + 1) = \bar{d}\bar{z}(z + 1)$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか.

E

サイコロを n 回振って、出た目を小さい方から順に並べ、第 i 番目を X_i ($i = 1, \dots, n$) とする.

- (1) $n = 7$ のとき、3 の目が 3 回、5 の目が 2 回出たとする. このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ.
- (2) 一般の n に対して、 $X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ.
- (3) 一般の n に対して、 X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ.
- (4) 一般の n に対して、期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ.

F

m, n を自然数とする. 次の算法を考える.

- (a) $i = m, j = n, k = 0$.
- (b) $i = 1$ ならば $\text{Ans} = k + j$ として終了する.
- (c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする.
- (d) $i = \lfloor i/2 \rfloor$.
- (e) $j = 2 * j$.
- (f) (b) にもどる.

(ここで, $\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す.)

- (1) $m = 100$ のとき, 3 周目と 4 周目の (b) における i, j, k の値を求めよ. たとえば 1 周目では $i = 100, j = n, k = 0$ である.
- (2) 一般の m に対して, (b) における i, j, k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ.
- (3) 一般の m に対して, Ans を求めよ.