

〔 1 〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 12 の定められた場所に記入しなさい．

〔問題〕

関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える．

- (1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．
- (2) $a = 0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ．
- (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ．

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 13 の定められた場所に記入しなさい.

〔問題〕

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする.

- (1) xy 平面上の点 (p, q) に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ.
- (2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ.
- (3) 直線

$$mx + ny = 0$$

に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ. ただし m, n は共には 0 でないとする.

- (4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ.

〔 3 〕（配点 50 点）

この問題の解答は、解答紙 14 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える．円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である．正四角柱の中心軸は z 軸で， xy 平面による切り口は一辺の長さが $\frac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である． $0 < r \leq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする．

- (1) 高さが $z = t$ ($-r \leq t \leq r$) で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ．
- (2) K の体積 $V(r)$ を求めよ．
- (3) $0 < r \leq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ．

〔 4 〕（配点 50 点）

次の問 **A** , **B** , **C** より 1 問を選択し、解答紙 **15** の ☐（2 箇所）
に選択した問題符号 **A** , **B** , **C** のいずれかを記入してから解答しなさい。

A

複素数平面上の点 z を考える.

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ をみたすとき

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

をみたす点 z は $a \neq 0$ のとき、どのような図形を描くか. ただし、 $\bar{z}$ は z に共役な複素数を表す.

- (2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p, q に対して

$$d(z - p)(\bar{z} - \bar{q}) = \bar{d}(z - q)(\bar{z} - \bar{p})$$

をみたす点 z はどのような図形を描くか.

B

サイコロを n 回振って、出た目を小さい方から順に並べ、第 i 番目を $X_i (i = 1, \dots, n)$ とする.

- (1) $n = 7$ のとき、3 の目が 3 回、5 の目が 2 回出たとする. このとき X_4 のとりうる値をすべて求めよ.
- (2) 一般の n に対して、 $X_1 = 2$ となる確率 $P(X_1 = 2)$ を求めよ.
- (3) 一般の n に対して、 X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(E(X_1) - 1)$ を求めよ. ここで $\log$ は自然対数を表す.
- (5) 一般の n に対して、期待値 $E(X_1 + X_n)$ を求めよ.

C

m, n を自然数とする. 次の算法を考える.

- (a) $i = m, j = n, k = 0$.
- (b) $i = 1$ ならば $\text{Ans} = k + j$ として終了する.
- (c) i の値が奇数なら $k = k + j$ とする.
- (d) $i = [i/2]$.
- (e) $j = 2 * j$.
- (f) (b) にもどる.

(ここで, $[x]$ は x を越えない最大の整数を表す.)

- (1) $m = 100$ のとき, 3 周目と 4 周目の (b) における i, j, k の値を求めよ. たとえば 1 周目では $i = 100, j = n, k = 0$ である.
- (2) 一般の m に対して, (b) における i, j, k の値について $i * j + k$ は 1 周目から最後まで一定であることを示せ.
- (3) 一般の m に対して, Ans を求めよ.
- (4) ℓ を自然数とする. $m = 3 \cdot 2^\ell$ のとき, 終了するまでに何回 (d) を実行するか.

〔 5 〕 (配点 50 点)

次の問 **D** , **E** , **F** より 1 問を選択し, 解答紙 16 の ☐ (2 個所) に選択した問題符号 **D** , **E** , **F** のいずれかを記入してから解答しなさい.

D

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし, 関数 $y = f(x)$ のグラフ G 上の点 $P(t, f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする. ただし $\theta(t)$ は $-\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \frac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正, 負, 0 に従って正, 負, 0 の値をとるものとする. また, 点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $Q(\alpha(t), \beta(t))$ を G の下側にとる.

- (1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ.
- (2) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ を求めよ.
- (3) t が a から b ($a < b$) まで変化するとき, 点 P, Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1, L_2 とする. $L_2 - L_1$ を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ.

E

- (1) e を自然対数の底とし,

$$f(x) = e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2)$$

とおく. $0 < x < 1$ においては $0 < f(x) < x^3$ が成り立つことを示せ. また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

を示せ. 必要であれば $e < 3$ を使ってよい.

- (2) 関数 $g(x) = e^x$ を考える. 区間 $0 \leq x \leq 1$ を n 個の小区間に等分して, 各小区間を底辺, 小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする. $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$n^k \left| \int_0^1 g(x) dx - K_n \right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限値を求めよ.

F

p, q を整数とし, x, y を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 4x + 9y = p \\ 2x + 6y = q \end{cases}$$

を考える.

- (1) この方程式を行列を用いて表し, 係数行列の逆行列を求めよ.
- (2) 上の連立方程式の解 x, y が共に整数であるような組 (p, q) をすべて求めよ.

ただし

$$0 \leq p \leq 5, \quad 0 \leq q \leq 5$$

とする.

- (3) 正の整数 d で, 「 d のどんな倍数 p, q に対しても上の連立方程式の解 x, y が整数になる」ものが存在することを示せ.
- (4) (3) における d のうちで最小のものを求めよ.