

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 12 の定められた場所に記入しなさい。

〔問題〕

xy 平面上で、

$$x = r(t) \cos t, \quad y = r(t) \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を C とする。

- (1) $r(t) = e^{-t}$ のとき、 x の最小値と y の最大値を求め、 C の概形を図示せよ。
(2) 一般に、すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し、

$$\int_0^\pi \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t \, dt = \int_0^\pi \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで、 $r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

- (3) (1)で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を、 x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積 V は

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{-3t} \sin t \, dt$$

と表せることを示せ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 13 の定められた場所に記入しなさい.

〔問題〕

座標平面上で、不等式

$$2|x-4|+|y-5|\leq 3, \quad 2||x|-4|+||y|-5|\leq 3$$

が表す領域を、それぞれ A , B とする.

- (1) 領域 A を図示せよ.
- (2) 領域 B を図示せよ.
- (3) 領域 B の点 (x, y) で、 x が正の整数であり y が整数であって、 $\log_x |y|$ が有理数となる点を、理由を示してすべて求めよ.

[3] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 14 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし、辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする。 p, n を自然数とし、領域

$$D_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x, x^p \leq y \leq n\}$$

を考え、その面積を S_n とする。 L_n と M_n を、それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

- (1) グラフ $y = x^p$ ($0 \leq x \leq n^{\frac{1}{p}}$) と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。
- (2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また、面積 S_n を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

次の問 **A** , **B** , **C** から 1 問を選択し, 解答紙 **15** の ☐ (左右 2 箇所)に選択した問題符号 **A** , **B** , **C** のいずれかを記入してから解答しなさい.

A

空間内に四面体 $OABC$ があり $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ はすべて 90° であるとする. 辺 OA , OB , OC の長さを, それぞれ a , b , c とし, 三角形 ABC の重心を G とする.

- (1) $\angle OGA$, $\angle OGB$, $\angle OGC$ がすべて 90° であるための条件を a , b , c の関係式で表せ.
- (2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする. 点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き, 点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く. このとき, 線分 OQ の長さの最小値を求めよ.

B

$0 < a < 1$ である定数 a に対し, 複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を ℓ とする. ただし, i は虚数単位である.

- (1) 複素数 z が ℓ 上を動くとき, z^2 が表す点の軌跡を図示せよ.
- (2) 直線 ℓ を, 原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする. m と (1) で求めた軌跡との交点の個数を $\sin \theta$ の値で場合分けして求めよ.

C

座標平面上に $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ を頂点とする正方形がある. ボールはこの正方形の中のすべての点に同様に確からしく落ちて, $y \leq x(a - x)$ の部分に落ちれば当たりとする. ただし, $0 < a \leq 2$ とする.

- (1) ボールを 1 回落とす. 当たる確率を求めよ.
- (2) 1 回目は $a = \frac{1}{2}$, 2 回目は $a = \frac{3}{2}$ として, ボールを 2 回落とす. 1 回だけ当たる確率を求めよ.
- (3) a の値を変えずにボールを 3 回落とす. 少なくとも 1 回は当たる確率が $\frac{19}{27}$ 以上であり, 当たりの数の期待値が $\frac{3}{2}$ 以下になるような a の値の範囲を求めよ.

〔 5 〕 (配点 50 点)

次の問 **D** , **E** , **F** から 1 問を選択し, 解答紙 **16** の ☐ (左右 2 箇所) に選択した問題符号 **D** , **E** , **F** のいずれかを記入してから解答しなさい.

D

座標平面上に点 $P(a, b)$ があり, P は $|a| \leq \frac{1}{2}$, $|b| \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動く.
また, 点 $Q(x, y)$ の座標は連立 1 次方程式 $AX = B$ の解になっている. ただし,

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1+b \end{pmatrix}$$

である.

- (1) 点 P が原点 O にあるときの点 Q の位置を点 R とする. $P \neq O$ のとき, $\frac{RQ}{OP}$ の最大値を求め, その最大値を与える点 P の全体を図示せよ.
- (2) OQ の最小値と, その最小値を与える点 P の座標を求めよ.

E

θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である定数とする. 座標平面上で, $a^2 > 4b$ を満たす点 $P(a, b)$ から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に引いた二つの接線の接点を Q, R とし, 接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とおく. 点 P は $\angle QPR = \theta$ を満たしている. 点 P の全体が作る図形を G とする.

- (1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき, $\tan \theta$ を m_1 と m_2 で表せ.
- (2) G を数式で表せ.
- (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ.

F

n を 2 以上の自然数とする. 数列 $\{S_k\}$ が $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$ で与えられている.

(1) 不等式

$$\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$$

が成り立つことを示せ.

(2) 一般に数列 $\{c_k\}$ に対して, $\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$ ($k = 1, 2, \dots$) とおく. 数列 $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ. また, $\sum_{k=1}^{n-1} k S_k = \left(S_n - \frac{1}{2}\right) p(n)$ となる n の整式 $p(n)$ を求めよ.

(3) 不等式

$$\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k S_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.