

[1]

(1) $y = f(x)$ が 2 点 $(\pm 3\sqrt{2}, 0)$ を通ることから,

$$0 = -18p + 2 \quad \therefore p = \frac{1}{9} \quad \cdots (\text{答})$$

(2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ はともに y 軸に関して対称だから, $x \geq 0$ のときを考えると, 交点の座標について,

$$-\frac{1}{9}x^2 + 2 = x - 2$$

$$x^2 + 9x - 36 = 0$$

$x \geq 0$ より, $x = 3$ となるから, 対称性により交点は,
 $(\pm 3, 1) \quad \cdots (\text{答})$

(3) (2)より, $A(-3, 1)$ となるから,

$$f'(x) = -\frac{2}{9}x$$

$$f'(-3) = \frac{2}{3}$$

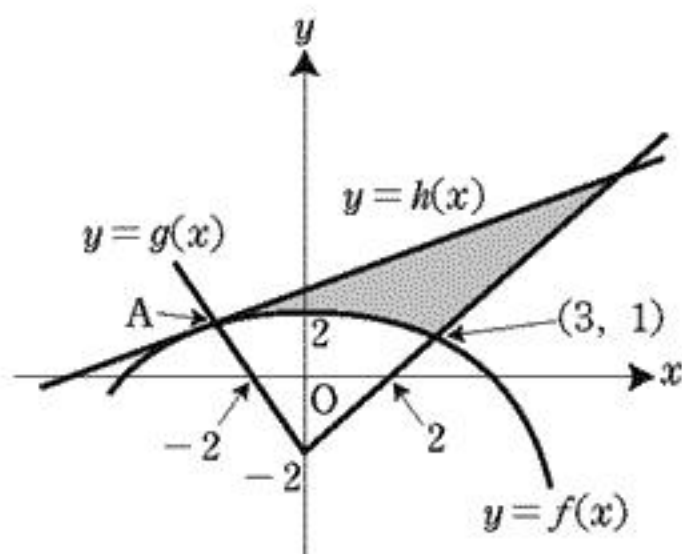
$$\text{より, } h(x) = \frac{2}{3}(x+3) + 1 = \frac{2}{3}x + 3 \quad \cdots (\text{答})$$

また, $y = h(x)$ と $y = g(x)$ が点 A 以外で交わるのは $x \geq 0$ のときだから, その交点について,

$$\frac{2}{3}x + 3 = x - 2 \quad \therefore x = 15$$

よって, $B(15, 13) \quad \cdots (\text{答})$

(4) 与えられた連立不等式の定める図形は右図の縦線部分(境界を含む)となるから, その面積は,



$$\int_{-3}^3 \{h(x) - f(x)\} dx + \int_3^{15} \{h(x) - g(x)\} dx$$

$$= \int_{-3}^3 \frac{1}{9}(x+3)^2 dx + \int_3^{15} \left\{ -\frac{1}{3}(x-15) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{27}(x+3)^3 \right]_{-3}^3 + \left[-\frac{1}{6}(x-15)^2 \right]_3^{15}$$

$$= 8 + 24$$

$$= 32 \quad \cdots (\text{答})$$

[2]

(1) $\beta = \cos \theta - 1 + i \sin \theta$ より,

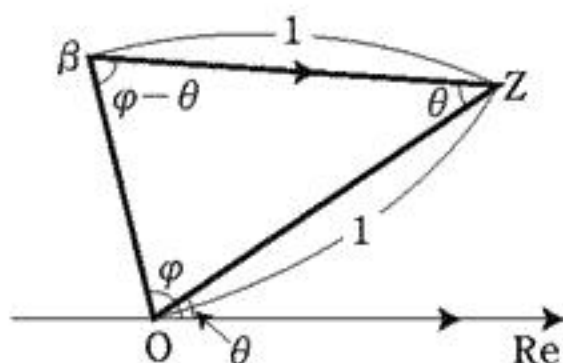
$$\begin{aligned} |\beta|^2 &= (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta \\ &= 2 - 2 \cos \theta \\ &= 4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

よって, $0^\circ < \frac{\theta}{2} < 90^\circ$ より, $|\beta| = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$ (証明終)

(2) O, Z, β を頂点とする三角形は右図のような二等辺三角形となるから, $\varphi = \arg \beta$ とすると,

$$2(\varphi - \theta) + \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \varphi = \frac{\theta}{2} + 90^\circ \quad (\text{証明終})$$



(3) $\theta = 60^\circ$ のとき, (1)(2)より,

$$|\beta| = 1, \arg \beta = 120^\circ$$

$$\text{また, } \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{より, } |\alpha| = \sqrt{3}, \arg \alpha = 30^\circ$$

であるから,

$$|\alpha^m \beta^n| = (\sqrt{3})^m, \arg \alpha^m \beta^n = 30^\circ \times m + 120^\circ \times n$$

この偏角を考えると, $\alpha^m \beta^n$ の虚部が負となるのは

$$(m, n) = (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)$$

のときであり, $\alpha^m \beta^n$ はそれぞれ

$$\alpha^3 \beta = 3\sqrt{3} (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = \frac{-9 - 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha \beta^2 = \sqrt{3} (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -\sqrt{3}i$$

$$\alpha^2 \beta^2 = 3 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha^3 \beta^2 = 3\sqrt{3} (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \frac{9 - 3\sqrt{3}i}{2}$$

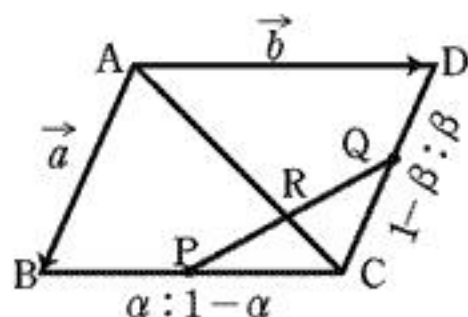
となるから, $\alpha^m \beta^n$ の虚部の最小値は $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$... (答)

で, これを与える (m, n) は,

$$(m, n) = (3, 1), (2, 2), (3, 2) \quad \dots \quad (\text{答})$$

[3]

$$(1) \quad \begin{cases} \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \alpha \vec{b} \\ \overrightarrow{AQ} = \beta \vec{a} + \vec{b} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$



(2) 点 R が線分 PQ を $t:1-t$ に内分しているとするとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= (1-t)\overrightarrow{AP} + t\overrightarrow{AQ} \\ &= (1-t + \beta t)\vec{a} + \{\alpha(1-t) + t\}\vec{b} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、点 R は対角線 AC 上にあるから、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC} = k\vec{a} + k\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\vec{a}$, $\vec{b}$ は一次独立だから、①, ②より、

$$k = 1-t + \beta t = \alpha(1-t) + t$$

$$\therefore t = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}, \quad k = \frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}$$

よって、

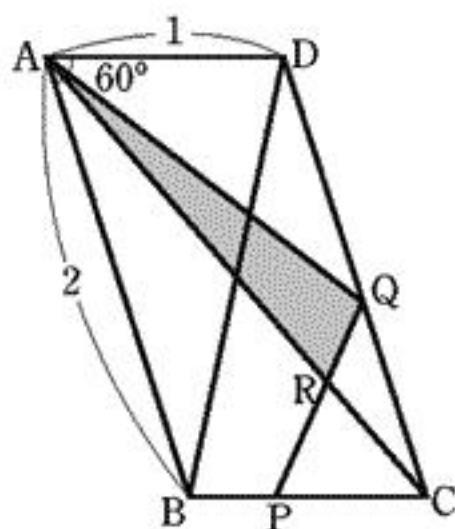
$$\begin{cases} \frac{QR}{RP} = \frac{1-t}{t} = \frac{1-\beta}{1-\alpha} \\ \frac{AR}{AC} = k = \frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta} \end{cases} \quad \dots (\text{答})$$

(3) $\angle ADB = 90^\circ$ となるから、

$$BD = \sqrt{3}, \quad \square ABCD = \sqrt{3}$$

よって、

$$\begin{aligned} \triangle AQR &= \triangle ACD \cdot \frac{AR}{AC} \cdot \frac{CQ}{CD} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta} \cdot (1-\beta) \\ &= \frac{\sqrt{3}(1-\alpha\beta)(1-\beta)}{2(2-\alpha-\beta)} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



[4]

- (1) 左端が赤色で色の変化が1回となるのは5通りあり，全事象は 2^6 通りだから，確率は

$$\frac{5}{2^6} = \frac{5}{64} \quad \cdots (\text{答})$$

- (2) 余事象は色の変化が0または1回するときである。

左端が赤色で色の変化が0回となるのは全て赤色の場合だから，

確率は $\frac{1}{64}$ 。

よって，左端が青色のときも考慮すると，色の変化が少なくとも2回起きる確率は

$$1 - 2\left(\frac{1}{64} + \frac{5}{64}\right) = \frac{13}{16} \quad \cdots (\text{答})$$

- (3) 色の変化は電球の間の5か所のうちの n か所で起きると考えれば ${}_5C_n$ 通りある。



左端の色は2通りだから，求める確率は

$$\frac{2 \cdot {}_5C_n}{2^6} = \frac{{}_5C_n}{32} \quad \cdots (\text{答})$$

- (4) 期待値は，

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^5 n \cdot \frac{{}_5C_n}{32} &= \frac{1}{32} (1 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1) \\ &= \frac{80}{32} \\ &= \frac{5}{2} \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$