

〔1〕

$$(1) \quad I_0 = \int_0^2 e^x dx = e^2 - 1 \quad \cdots \text{ (答)}$$

部分積分により, $n=1, 2, \dots$ のとき,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ [x^n e^x]_0^2 - n \int_0^2 x^{n-1} e^x dx \right\} \\ &= \frac{(-1)^n 2^n}{n!} e^2 + I_{n-1} \quad \cdots \text{ (答)} \end{aligned}$$

よって, 順に

$$I_1 = -2e^2 + I_0 = -e^2 - 1$$

$$I_2 = 2e^2 + I_1 = e^2 - 1$$

$$I_3 = -\frac{4}{3}e^2 + I_2 = -\frac{e^2}{3} - 1 \quad \cdots \text{ (答)}$$

(2) $n=1, 2, \dots$ のとき, $0 \leq x \leq 2$ に対して $x^n \geq 0$, $e^x \leq e^2$ であるから,

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq \frac{e^2}{n!} \int_0^2 x^n dx = \frac{2^{n+1} e^2}{(n+1)!}$$

よって,

$$\frac{2^{n+1} e^2}{(n+1)!} \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

を示せばよいが, これは $2 \cdot 3^{n-1} \leq (n+1)!$ $\cdots$ ①

と同値になるから, 以下, この不等式を示す。

(i) $n=1$ のとき, (左辺) = (右辺) = 2 だから①は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき, ①が成り立つと仮定すると $2 \cdot 3^{k-1} \leq (k+1)!$

両辺を 3 倍して $2 \cdot 3^k \leq 3(k+1)!$

$k \geq 1$ だから $3 \leq k+2$ であり, よって, $2 \cdot 3^k \leq (k+2)!$ とな

り, $n=k+1$ のときも①が成り立つ。

(i)(ii)から, 数学的帰納法により $n=1, 2, \dots$ に対して①が成り立つ。(証明終)

$$(3) \quad (1) \text{より, } \frac{(-1)^n 2^n}{n!} = \frac{1}{e^2} (I_n - I_{n-1}) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\text{となるから, } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2} (I_n - I_0) + 1 = \frac{1}{e^2} I_n + \frac{1}{e^2}$$

$$\text{また, (2)より, } |I_n| \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

となるから, はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

$$\text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2} \quad \cdots \text{ (答)}$$

[2]

$$(1) \quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(2) \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \text{より,}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^4 + 6a^2b^2 + b^4 & 4a^3b + 4ab^3 \\ 4a^3b + 4ab^3 & a^4 + 6a^2b^2 + b^4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^4 + (a-b)^4 & (a+b)^4 - (a-b)^4 \\ (a+b)^4 - (a-b)^4 & (a+b)^4 + (a-b)^4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix} \cdots \textcircled{1}$$

と推定される。

(i) $n=1$ のとき, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ だから $\textcircled{1}$ は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると,

$$A^{k+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+b)^k + (a-b)^k & (a+b)^k - (a-b)^k \\ (a+b)^k - (a-b)^k & (a+b)^k + (a-b)^k \end{pmatrix}$$

の (1, 1) 成分は,

$$\frac{1}{2} \{ a(a+b)^k + a(a-b)^k + b(a+b)^k - b(a-b)^k \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a+b)(a+b)^k + (a-b)(a-b)^k \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a+b)^{k+1} + (a-b)^{k+1} \}$$

となり, 同様に (1, 2) 成分は $\frac{1}{2} \{ (a+b)^{k+1} - (a-b)^{k+1} \}$

となる。(2, 1) 成分と (2, 2) 成分は同じ計算となるから,

$n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ が成り立つ。

よって, (i)(ii) から, 数学的帰納法により, すべての自然数 n に対して $\textcircled{1}$ が成り立つ。

$$(4) \quad x_n = \frac{1}{2} \{ 1 + (2a-1)^n \}$$

$$-1 < 2a-1 < 1 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$$

[3]

変数 t を $t - \frac{\pi}{4}$ に置き換え、さらに時刻 t を 2π ずらしても軌跡は変わらないから、

$$C: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \quad (-\pi \leq t < \pi) \quad \text{としてよい。}$$

(1) P が原点を通るのは $t = \pm \frac{\pi}{2}$ のときで、

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = 2\cos 2t \end{cases}$$

より、速度ベクトルは、 $(\pm 1, -2) \dots$ (答)

$$(2) \begin{cases} x(-t) = \cos t = x(t) \\ y(-t) = -\sin 2t = -y(t) \end{cases} \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

より、 C は x 軸に関して対称である。

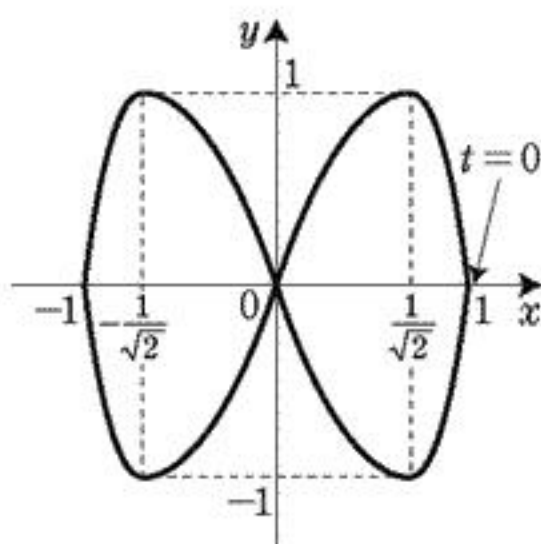
$$\begin{cases} x(t+\pi) = -\cos t = -x(t) \\ y(t+\pi) = \sin 2t = y(t) \end{cases} \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

より、 C は y 軸に関して対称である。(証明終)

(3) (2)より第1象限の概形が分かればよい。

$$x(t) \geq 0 \text{ かつ } y(t) \geq 0 \iff 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

この範囲での増減表は右のようになるから、 C の概形は下図のようになる。



t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		-	-	-	
$y'(t)$		+	0	-	
(x, y)	$(1, 0)$	$\searrow$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$	$\swarrow$	$(0, 0)$

(4) 置換積分より、求める面積は

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 y(t) dx &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sin t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos 3t) dt \\ &= 2 \left[\sin t - \frac{1}{3} \sin 3t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{8}{3} \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

〔4〕

(1) 求める単位ベクトルを $\vec{e} = (x, y, z)$ とすると,

$$\begin{cases} |\vec{e}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 & \cdots \textcircled{1} \\ \vec{e} \cdot \vec{OA} = ax + by = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ \vec{e} \cdot \vec{OC} = x + y + z = 0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

②, ③より $bz = (a-b)x$ となるから, これと②を①に代入することにより

$$x = \pm \frac{b}{\sqrt{2(a^2 - ab + b^2)}}$$

が得られる。

$$\text{よって, } \vec{e} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(a^2 - ab + b^2)}}(b, -a, a-b) \quad \cdots \text{ (答)}$$

また, $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ かつ $a \geq b$ より,

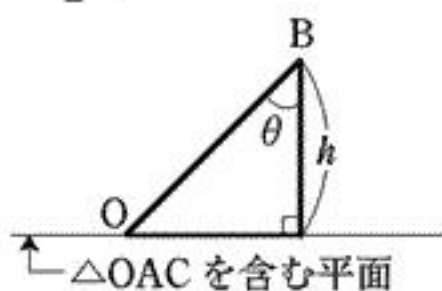
$$|\vec{e} \cdot \vec{OB}| = \frac{bc + d(a-b)}{\sqrt{2(a^2 - ab + b^2)}} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(2) $\triangle OAC$ を四面体 $OABC$ の底面と見る。 $\vec{e} \perp \triangle OAC$ だから,
 $\triangle OAC$ の法線と $\vec{OB}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると,

$$\text{高さ } h \text{ は } h = |\vec{OB}| \cos \theta = |\vec{e} \cdot \vec{OB}|$$

また,

$$\begin{aligned} \triangle OAC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OC}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3(a^2 + b^2) - (a+b)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 - ab + b^2)} \end{aligned}$$



となるから, 四面体 $OABC$ の体積 V は,

$$V = \frac{1}{3} \triangle OAC \cdot h = \frac{1}{6} \{bc + d(a-b)\} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(3) (i) $b > 0$ かつ $a - b > 0$ のとき,

V は c, d について単調増加だから $c = d = 1$ のとき最大で,

このとき $V = \frac{a}{6}$ となるから, $a = 1$ のとき最大となる。

(ii) $b = 0$ かつ $a - b > 0$ のとき,

$V = \frac{ad}{6}$ となるから, $a = d = 1$ のとき最大となる。

(iii) $b > 0$ かつ $a - b = 0$ のとき,

$V = \frac{bc}{6}$ となるから, $b = c = 1$ のとき最大となる。

(i)(ii)(iii)のどの場合も最大値は $V = \frac{1}{6}$ となり, 点 A, B は

$$\begin{cases} A(1, b, 0), B(1, 0, 1) & (0 \leq b \leq 1) \\ A(1, 0, 0), B(c, 0, 1) & (0 \leq c \leq 1) \\ A(1, 1, 0), B(1, 0, d) & (0 \leq d \leq 1) \end{cases} \quad \cdots \text{ (答)}$$

〔5〕

- (1) 左側が赤，右側が青となるのは $n-1$ 通りあり，全事象は 2^n 通りだから，

$$\text{確率は } \frac{n-1}{2^n} \quad \dots \text{ (答)}$$

- (2) 余事象は色の変化が 0 または 1 回るときである。

左端が赤色で色の変化が 0 回となるのは全て赤色の場合だから，

$$\text{確率は } \frac{1}{2^n}$$

よって，左端が青色のときも考慮すると，色の変化が少なくとも 2 回起きる確率は，

$$1 - 2\left(\frac{1}{2^n} + \frac{n-1}{2^n}\right) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}} \quad \dots \text{ (答)}$$

- (3) 色の変化は電球の間の $n-1$ か所のうちの m か所で起きると考えれば ${}_{n-1}C_m$ 通りある。

左端の色は 2 通りだから，

求める確率は

$$\frac{2 \cdot {}_{n-1}C_m}{2^n} = \frac{{}_{n-1}C_m}{2^{n-1}} \quad \dots \text{ (答)}$$



- (4) 期待値は，

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} m \cdot \frac{{}_{n-1}C_m}{2^{n-1}} &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} m {}_{n-1}C_m \\ &= \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{m-1} \\ &= \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{n-2} {}_{n-2}C_m \\ &= \frac{n-1}{2^{n-1}} (1+1)^{n-2} \\ &= \frac{n-1}{2} \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$