

(1) $P(p, ap^2)$, $p \geq 0$ とおくと

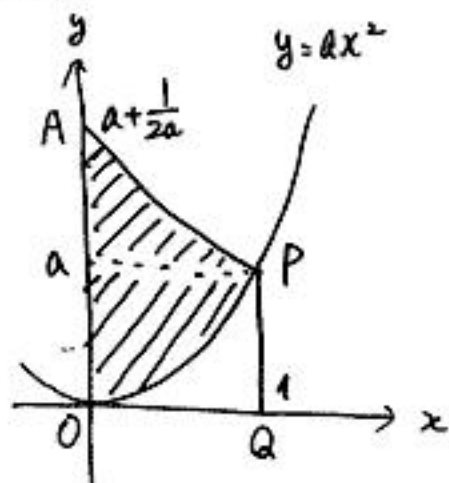
$$AP^2 = p^2 + \left(ap^2 - a - \frac{1}{2a}\right)^2 = a^2(p^2 - 1)^2 + 1 + \frac{1}{4a^2} \\ \geq 1 + \frac{1}{4a^2} \text{ となる.}$$

AP の最小性から $p^2 - 1 = 0$ となり, $p \geq 0$ より $p = 1$.

つまり $P(1, a)$ となり $AP = \sqrt{1 + \frac{1}{4a^2}}$ となる.

(2) P から x 軸に下ろした垂線の足を Q とする.

$$S(a) = \text{OAPQ} - \text{OPQ} \\ = \left(a + a + \frac{1}{2a}\right) \times 1 \times \frac{1}{2} - \int_0^1 ax^2 dx \\ = \left(a + \frac{1}{4a}\right) - \frac{1}{3}a \\ = \frac{2}{3}a + \frac{1}{4a} \text{ となる.}$$



(3) $a > 0$ より相加相乗平均不等式を用いて,

$$S(a) = \frac{2}{3}a + \frac{1}{4a} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{4a}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \text{ となる}$$

等号は $\frac{2}{3}a = \frac{1}{4a}$, $a > 0$ のとき, 成り立ち

$$a = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ のとき成立.}$$

つまり $a = \frac{\sqrt{6}}{4}$ のとき $S(a)$ は最小値 $\frac{2}{\sqrt{6}}$ となる.

(1) 判別式が負となればよから,

$$t^2 - 4t < 0 \quad \therefore 0 < t < 4 \quad \dots (\text{答})$$

2のときの虚数解は,

$$z = \frac{-t \pm \sqrt{4t - t^2}i}{2} \quad \dots (\text{答})$$

(2) $z(t)$ の実部を x , 虚部を y とすると,

$$x = -\frac{t}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{4t - t^2}}{2} \quad (0 < t < 4)$$

となるから,

$$y^2 = t - \frac{t^2}{4} = -2x - x^2 \quad (-2 < x < 0, y > 0)$$

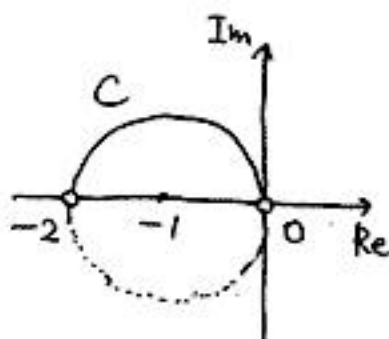
となり, 2枚は円

$$(x+1)^2 + y^2 = 1 \quad (y > 0)$$

の $(x, y) = (0, 0), (-2, 0)$ を

除いた部分で, 図示すると

右図のようになる。



$$(3) \quad w = \frac{iz}{z+1} \iff z = -\frac{w}{w-i} \quad (\text{ただし } \text{Im } z > 0)$$

であり, (2) の円は $|z+1| = 1$ と表せるから,

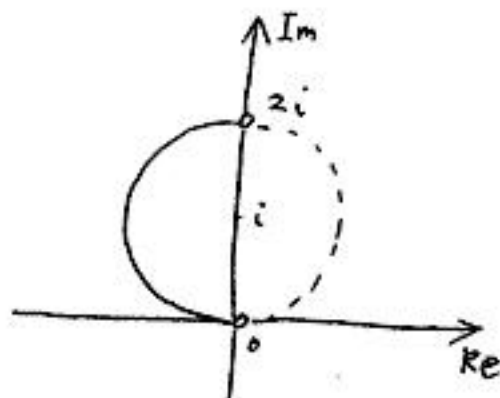
$$\left| -\frac{w}{w-i} + 1 \right| = 1$$

$$|w - i| = 1$$

$$w = x + iy \text{ とおくと } \frac{w}{i-w} = \frac{x+iy}{i-(x+iy)} = \frac{-x^2 + y(1-y) - xi}{x^2 + (1-y)^2}$$

$$\text{Im } z > 0 \iff \frac{-x}{x^2 + (1-y)^2} > 0 \iff x < 0$$

よって, w が描く図形は, 点 i を中心とする半径1の円周のうち実部が負の部分で, 図示すると右図のようになる。



m を整数とすると $[x] \leq m \Leftrightarrow x < m+1$ が成り立つ.

(1) $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq 1$ 底 $2 > 1$ より 真数条件と

併せて 与方程式 $\Leftrightarrow 0 < \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq 2$

上の事実から $\Leftrightarrow 0 < \frac{5}{2} + \cos \theta < 3$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} < \cos \theta < \frac{1}{2} \quad \text{となり、}$$

θ の範囲から、 $60^\circ < \theta < 180^\circ$ となる。

(2) $\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right] \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \geq 1$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sin \theta \geq -\frac{1}{2}.$$

底は $2 > 1$ なるので

$$\Leftrightarrow \sin \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{となり、}$$

θ の範囲から $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ となる。

(3) $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{5}{2} + \cos \theta < 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} < \cos \theta < -\frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sin \theta \geq -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \dots \textcircled{2}$$

θ の範囲は

①より $120^\circ < \theta < 180^\circ$ であり、

②より $\alpha \leq \theta \leq 180^\circ - \alpha$ である。

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sin(180^\circ - \alpha)$ より $180^\circ - \alpha > 120^\circ$ なる

求める範囲は $120^\circ < \theta \leq 180^\circ - \alpha$ となる。

(1) x_1, x_2 の起りうる全 2 の組合せは $6 \times 6 = 36$ 通り、
 $x_1 < x_2$ となる組合せは ${}^6C_2 = 15$ 通り。
 故に $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ が求める確率。

(2) x_1, x_2, x_3 の起りうる全組合せは $6 \times 6 \times 6 = 216$ 通り、
 $x_1 < x_2 < x_3$ となる組合せは ${}^6C_3 = 20$ 通り
 故に $\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$ が求める確率。

(3) $x_1 < x_2 < x_3$ となる確率と
 $x_1 < x_2 \leq x_3$ となる確率を足すと
 $x_1 < x_2$ となる確率になるのだから、
 求める確率は $\frac{5}{12} - \frac{5}{54} = \frac{35}{108}$ となる。

(4) 条件 C をみたす確率を $P(C)$ と書き、
 求める期待値を E とする。

$$\begin{aligned}
 E &= P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) \times 4 \\
 &\quad + P(x_1 < x_2 < x_3 \leq x_4) \times 3 \\
 &\quad + P(x_1 < x_2 \leq x_3) \times 2 \\
 &\quad + P(x_1 \leq x_2) \times 1 \\
 &= P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) \times 4 \\
 &\quad + \{P(x_1 < x_2 < x_3) - P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)\} \times 3 \\
 &\quad + \{P(x_1 < x_2) - P(x_1 < x_2 < x_3)\} \times 2 \\
 &\quad + \{1 - P(x_1 < x_2)\} \times 1 \\
 &= P(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) + P(x_1 < x_2 < x_3) + P(x_1 < x_2) + 1 \\
 &= \frac{{}^6C_4}{6^4} + \frac{5}{54} + \frac{5}{12} + 1 \\
 &= \frac{73}{48} \text{ となる。}
 \end{aligned}$$