

[1]

(1) 曲線 C について, $y' = 2\cos x$ より

$$y' = 1 \iff x = \frac{\pi}{3} \quad (\because -\pi \leq x \leq \pi)$$

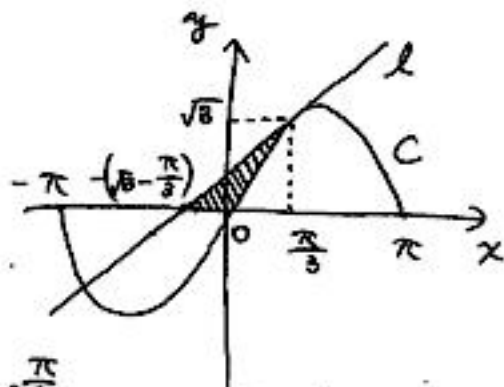
であるから, C の傾き 1 の接線は点 $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ における接線で,

$$y = x + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} > 0$ であるから 2 の直線が l となり,

$$a = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad \dots (\text{答})$$

(2) 右図の斜線部を
x 軸のまわりには回転
させる。2 の回転体の
体積 V は,



$$V = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 \sqrt{3} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin x)^2 dx$$

で表される。222で,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

より,

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi - \frac{2}{3} \pi^2 \quad \dots (\text{答})$$

[2]

$$(1) \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ とする,}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1 + p_2 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これを連立方程式とみて解けば $p_1 = p_2 = 2$
が得られるから, $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \dots (\text{答})$

$$(2) \text{ 漸化式の両辺から (1) の等式の両辺を引くと,}$$

$$\vec{p}_{n+1} - \vec{p} = A(\vec{p}_n - \vec{p}) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\text{よって, } \vec{q}_{n+1} = A \vec{q}_n \quad (n=1, 2, \dots) \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$$

と推定される。

$$(I) \quad n=1 \text{ のときは } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より } \textcircled{1} \text{ は正しい。}$$

$$(II) \quad n=k \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ が正しいと仮定すると,}$$

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ のときも正しい。

(I)(II) から, 数学的帰納法により すべての自然数 n に対して $\textcircled{1}$ は正しい,

$$A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots (\text{答})$$

$$(4) \quad \vec{q}_1 = \vec{p}_1 - \vec{p} = \vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるから, (2)(3) より,

$$\begin{aligned} \vec{q}_n &= A^{n-1} \vec{q}_1 = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} -2n+1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (n=2, 3, \dots) \end{aligned}$$

この式は $n=1$ のときも成り立ち,

$$\vec{p}_n = \vec{q}_n + \vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{-2n+1}{2^{n-1}} + 2 \\ -\frac{1}{2^{n-2}} + 2 \end{pmatrix} \dots (\text{答})$$

(1) 判別式が負となればよから,

$$t^2 - 4t < 0 \quad \therefore 0 < t < 4 \quad \dots (\text{答})$$

2の2次の虚数解は,

$$z = \frac{-t \pm \sqrt{4t - t^2}i}{2} \quad \dots (\text{答})$$

(2) $z(t)$ の実部を x , 虚部を y とすると,

$$x = -\frac{t}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{4t - t^2}}{2} \quad (0 < t < 4)$$

となるから,

$$y^2 = t - \frac{t^2}{4} = -2x - x^2 \quad (-2 < x < 0, y > 0)$$

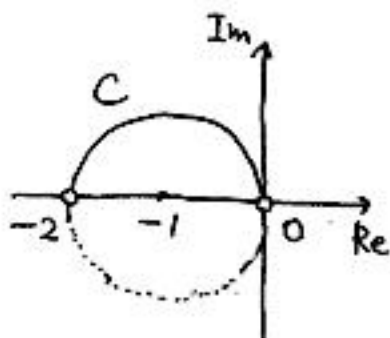
となり, z は円

$$(x+1)^2 + y^2 = 1 \quad (y > 0)$$

の $(x, y) = (0, 0), (-2, 0)$ を

除いた部分で, 図示すると

右図のようになる。



(3) $w = \frac{iz}{z+1} \iff z = -\frac{w}{w-i}$ (ただし $\text{Im } z > 0$)

であり, (2) の円は $|z+1| = 1$ と表せるから,

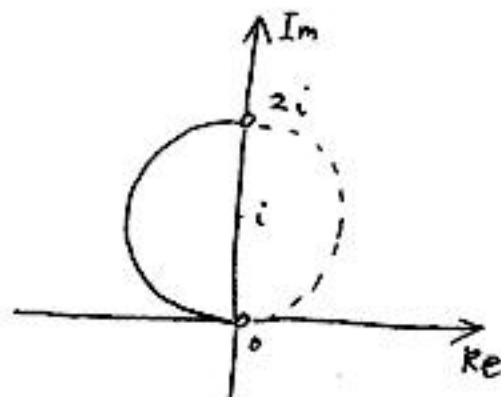
$$\left| -\frac{w}{w-i} + 1 \right| = 1$$

$$|w - i| = 1$$

$$w = x + iy \text{ とおくと } \frac{w}{i-w} = \frac{x+iy}{i-(x+iy)} = \frac{-x^2 + y(1-y) - xi}{x^2 + (1-y)^2}$$

$$\text{Im } z > 0 \iff \frac{-x}{x^2 + (1-y)^2} > 0 \iff x < 0$$

よって, w が描く図形は, 点 i を中心とする半径 1 の円周のうち実部が負の部分で, 図示すると右図のようになる。



[4]

$$(1) \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] = \begin{cases} 1 & (\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi) \\ 2 & (\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{2}{3}\pi) \\ 3 & (0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

よ、

$$\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] = \begin{cases} 0 & (\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi) \\ 1 & (\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{2}{3}\pi) \\ \log_2 3 & (0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

となるから、求める θ の範囲は、

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi \quad \dots (1/2)$$

(2) $0 < \theta < \pi$ に対し、

$$\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \leq \frac{3}{2} + \log_2 1 = \frac{3}{2}$$

があるから、

$$\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right] \geq 1 \iff 1 \leq \frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \leq \frac{3}{2}$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \theta \leq 1$$

$$\iff \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \quad \dots (1/3)$$

$$(3) \log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right]$$

$$\iff \left(\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right], \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right] \right)$$

$$= (0, 0), (0, 1), (1, 1)$$

2の3つ、 $(0, 1), (1, 1)$ となるのは (1) かつ (2) のときで、 $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{3}{4}\pi$ 。

$(0, 0)$ となるのは、

$$\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta < 1$$

$$\iff \frac{2}{3}\pi < \theta < \pi \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \sin \theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff \frac{3}{4}\pi < \theta \leq \pi - \alpha$$

以上より、

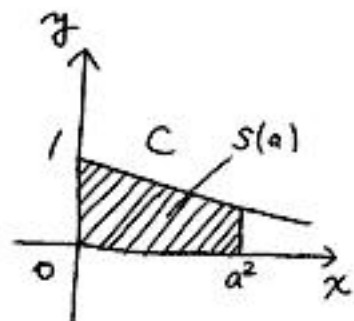
$$\frac{\pi}{3} < \theta \leq \pi - \alpha \quad \dots (1/4)$$

[5]

$$(1) \quad C: \begin{cases} x=t^2 \\ y=e^{-t} \end{cases}$$

であり, $\frac{dx}{dt} = 2t$ だから,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a y dx \\ &= \int_0^a e^{-t} \cdot 2t dt \\ &= 2[-(t+1)e^{-t}]_0^a = 2\{1-(a+1)e^{-a}\} \end{aligned}$$



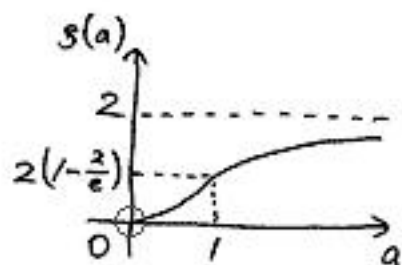
$$(2) \quad \begin{aligned} S'(a) &= 2ae^{-a} \\ S''(a) &= 2(1-a)e^{-a} \end{aligned}$$

より, 増減・凹凸表は右の
ようになる, また,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = 2$$

より, $S(a)$ のグラフの概形は
右図のようになる。

a	0 ...	1 ...
$S'(a)$	+	+
$S''(a)$	+	-
$S(a)$	↗	↘



$$(3) \quad S(2) < 1.35 < S(3)$$

を示せばよいが,

$$S(2) = 2\left(1 - \frac{3}{e^2}\right), \quad S(3) = 2\left(1 - \frac{4}{e^3}\right)$$

を用いて 2 本を同値変形すると,

$$0.65e^2 < 6 \quad \text{かつ} \quad 0.65e^3 > 8 \quad \dots \textcircled{1}$$

となるから 2 本を示せばよい。

$$\begin{cases} 0.65e^2 < 0.65 \cdot 3^2 = 0.585 < 6 \\ 0.65e^3 > 0.65\left(\frac{5}{2}\right)^3 = 10.15625 > 8 \end{cases}$$

であるから ① は成り立ち, $S(a) = 1.35$ となる

a が $2 < a < 3$ の範囲に存在する。 (証明終)