

[1]

(1)

$l: y - t^2 = 2t(x - t)$ から, $y = 0$ とすれば Q の x 座標が求まる. このとき

$$x = \frac{1}{2}t$$

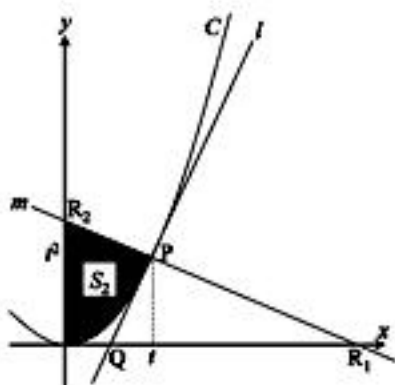
$m: y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$ から, $y = 0$ とすれば R_1 の x 座標が求まる. このとき

$$x = 2t^3 + t$$

(2)

S_2 は右図の斜線部の面積なので,

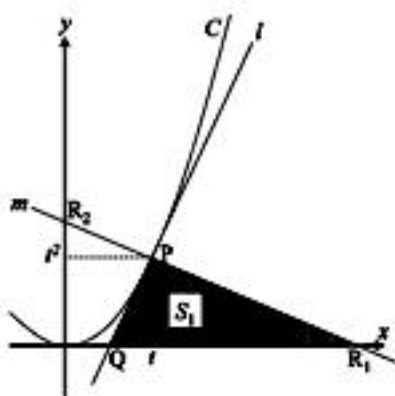
$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^t \left\{ -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2 - x^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{2} + t^2 \right) t - \int_0^t x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t \end{aligned}$$



(3)

S_1 は右図の斜線部の面積なので,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \left(2t^3 + t - \frac{1}{2}t \right) t^2 \\ &= t^5 + \frac{1}{4}t^3 \end{aligned}$$



したがって, (2) より

$$\begin{aligned} S_1 &> S_2 \\ t^5 + \frac{1}{4}t^3 &> \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t \\ t(3t^2 + 1)(4t^2 - 3) &> 0 \end{aligned}$$

ここで $t > 0$ より

$$t > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[2]

(1)

(証明) 「 $n \geq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 で割り切れない」 (①) ことを数学的帰納法を用いて証明する.

(i) $n = 3$ のとき $a_3 = 12, b_3 = 17$ なので①は成り立つ.

(ii) $n = k (\geq 3)$ のとき①が成り立つと仮定する.

このとき, b_k の符号を適切にとれば整数 a'_k, b'_k を用いて $a_k = 3a'_k, b_k = 3b'_k \pm 1$ とおくことができる. したがって

$$a_{k+1} = 2(3a'_k)(3b'_k \pm 1) = 3(2a'_k)(3b'_k \pm 1) \quad (1)$$

$$b_{k+1} = 2(3a'_k)^2 + (3b'_k \pm 1)^2 = 3(6a_k'^2 + 3b_k'^2 \pm 2b'_k) + 1 \quad (2)$$

より $n = k + 1$ のときも①は成り立つ.

(i), (ii) より $n \geq 3$ において①は成り立つ

(証明終)

(2)

(証明)

まずは $n \geq 1$ のとき, b_n は奇数であることを示す

(i) $b_1 = 1$ は奇数である.

(ii) b_k が奇数, つまり $b_k = 2m_k + 1$ とすると $b_{k+1} = 2(a_k^2 + 2m_k^2 + 2m_k) + 1$ は奇数である.

(i)(ii) より帰納的に $n \geq 1$ で b_n は奇数であることがいえた.

次に「 $n \geq 2$ のとき, a_n と b_n は互いに素である」 (②) ことを数学的帰納法を用いて証明する.

(i) $n = 2$ のとき, $a_2 = 2, b_2 = 3$ より②は成り立つ.

(ii) $n = k$ のとき②が成り立つと仮定する.

このとき, a_{k+1} と b_{k+1} が互いに素でないことを仮定すれば, a_{k+1} と b_{k+1} は素数の公約数 d をもち, $a_{k+1} = dA_{k+1}, b_{k+1} = dB_{k+1}$ と表すことができる. また, b_n は奇数なので $d \neq 2$.

ここで, $a_{k+1} = 2a_k b_k = dA_{k+1}$ より素数 $d (\neq 2)$ は a_k か b_k の約数になっていなければならない.

d が a_k の約数である場合,

$$b_{k+1} = 2(dA_k)^2 + b_k^2 = d \left(2dA_k^2 + \frac{b_k^2}{d} \right) = dB_{k+1}$$

より $\frac{b_k^2}{d}$ は整数. これが整数となるためには d が b_k の約数でなければならず, a_k と b_k が 1 以外の公約数を持つことになるので矛盾する.

d が b_k の約数である場合,

$$b_{k+1} = 2(a_k)^2 + dB_k^2 = d \left(\frac{2a_k^2}{d} + dB_k^2 \right) = dB_{k+1}$$

より $\frac{2a_k^2}{d}$ は整数. これが整数となるためには d が a_k の約数でなければならず, a_k と b_k が 1 以外の公約数を持つことになるので矛盾する.

以上より, a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素でなければならない. つまり $n = k + 1$ で②は成り立つ.

(i), (ii) より, $n \geq 2$ で②は成り立つ.

(証明終)

[3]

- (1) (証明) $\vec{v} = h\vec{a} + \vec{b}$ とすると $\vec{v}$ と $\vec{a}$ は垂直なので $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ である. このことに注意して計算すると

$$\begin{aligned} |x\vec{a} + \vec{b}|^2 - |h\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |(x-h)\vec{a} + \vec{v}|^2 - |\vec{v}|^2 \\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2 + 2(x-h)\vec{a} \cdot \vec{v} \\ &= (x-h)^2|\vec{a}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} |x\vec{a} + \vec{b}|^2 &\geq |h\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ |x\vec{a} + \vec{b}| &\geq |h\vec{a} + \vec{b}| \end{aligned}$$

(証明終)

- (2) (証明) $\vec{u} = h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}$ とすると $\vec{u}$ と $\vec{a}$, $\vec{u}$ と $\vec{b}$ は垂直なので $\vec{u} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{u} \cdot \vec{b} = 0$ である. このことに注意して計算すると

$$\begin{aligned} |x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}|^2 - |h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}|^2 &= |(x-h)\vec{a} + (y-k)\vec{b} + \vec{u}|^2 - |\vec{u}|^2 \\ &= |(x-h)\vec{a} + (y-k)\vec{b}|^2 \\ &\quad + 2(x-h)\vec{a} \cdot \vec{u} + 2(y-k)\vec{b} \cdot \vec{u} \\ &= |(x-h)\vec{a} + (y-k)\vec{b}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} |x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}|^2 &\geq |h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}|^2 \\ |x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}| &\geq |h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}| \end{aligned}$$

(証明終)

- (3) (2) より $(x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0$, $(x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$ のときに最小値を与える.

したがって

$$\begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = 3x + 3y - 3 = 0 \\ (x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = 3x + 21y - 39 = 0 \end{cases}$$

この解となる $x = -1$, $y = 2$ のときに最小値

$$|-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{6}$$

をとる.

[4]

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right| = 0 \\ \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| &= \frac{1}{2} \\ \sin x &= 0, 1 \\ x &= 0, \pm\pi, \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

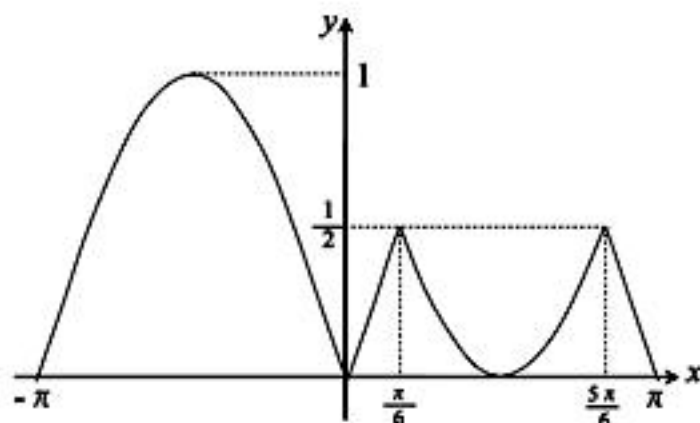
(2)

$$\left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sin x & (-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi) \\ \sin x - \frac{1}{2} & (\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}) \end{cases}$$

より

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & (-\pi \leq x \leq 0) \\ \sin x & (0 < x \leq \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi) \\ 1 - \sin x & (\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}) \end{cases}$$

なので $y = f(x)$ のグラフは右図のようになる.



(3)

$f(x) = k$ をみたす x の個数は 2 つのグラフ $y = f(x)$ と $y = k$ との交点の数に等しい. したがって, (2) より

$$\begin{cases} 0 \text{ 個} & (k < 0, 1 < k) \\ 1 \text{ 個} & (k = 1) \\ 2 \text{ 個} & (\frac{1}{2} < k < 1) \\ 4 \text{ 個} & (k = 0, \frac{1}{2}) \\ 6 \text{ 個} & (0 < k < \frac{1}{2}) \end{cases}$$