

平成18年度入学試験問題

数

学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12 ページあります。
また，中にはさみ込まれている解答紙は，5 枚(13 から 17 まで)です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に各「解答紙」の 2 箇所受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて「解答紙」のおもてに記入しなさい。
6. 経済学部経済工学科の配点は，表示されているものの $\frac{7}{5}$ です。
7. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰って下さい。

数 学 数学 I, 数学 A
数学 II, 数学 B
数学 III, 数学 C

[1] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **13** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

次の問いに答えよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であること、また、 e は自然対数の底で、 $e < 3$ であることを用いてよい。

(1) 自然数 n に対して、方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) の 2 つの実数解を α_n, β_n ($\alpha_n < \beta_n$) とするとき、

$$1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}, \quad ne < \beta_n$$

が成り立つことを示せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ を求めよ。

(下書き用紙)

[2] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **14** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

$\triangle OAB$ において、辺 OB の中点を M 、辺 AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし、 $0 < \alpha < 1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし、 Q を通り、線分 AM に垂直な直線が、辺 OA またはその延長と交わる点を R とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ および α を用いて表せ。
- (2) $|\vec{a}|=2$ 、 $|\vec{b}|=3$ 、 $\angle AOB=\theta$ で $\cos\theta=\frac{1}{6}$ とする。このとき、ベクトル $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ。
- (3) (2) の条件のもとで、点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。

(下書き用紙)

[3] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **15** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は、 $a_1 = b_1 = 1$ および、関係式

$$a_{n+1} = 2a_nb_n$$

$$b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

をみたすものとする。

- (1) $n \geq 3$ のとき、 a_n は 3 で割り切れるが、 b_n は 3 で割り切れないことを示せ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 a_n と b_n は互いに素であることを示せ。

(下書き用紙)

[4] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **16** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

関数

$$f(x) = \left| \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right|$$

を考える。ただし、 $-\pi \leq x \leq \pi$ とする。さらに、 $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ に対して、

$$F(a) = \int_0^a f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (3) $F(a)$ を求めよ。

(下書き用紙)

[5] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **17** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

区間 $[a, b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは、

$$a \leq x \leq b \text{ ならば, } a \leq f(x) \leq b$$

が成り立つこととする。 $f(x) = 4x(1 - x)$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 区間 $[0, 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

(2) $0 < a < b < 1$ とする。このとき、区間 $[a, b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)