

$$(1) \quad f(x) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \text{ また } x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\iff x = \pm\sqrt{2}, 2 \pm \sqrt{2}$$

小さい順に並べると, $x = -\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}$ 【答】

(2) $|x| \geq 2$ のとき $x^2 - 2 \geq 2$ である.

また, $|x - 2| \geq 2$ のとき $x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2 \geq 2$ である.

したがって, $x \leq -2$ または $x \geq 4$ ならば $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 4x + 2) \geq 2 \times 2 = 4$ となる.

$-1 \leq x \leq 3$ の範囲の整数に対しては, f は右の表の値を取る.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-7	-4	1	-4	-7

したがって, $f(n) \leq 0 \iff n = -1, 0, 2, 3$ 【答】

(3) 上の表より, $f(n) \leq 1 \iff n = -1, 0, 1, 2, 3$ 【答】

(1) 3 線分 AB, BC, CA の長さはすべて

$$\sqrt{(t-1)^2 + t^2 + 1} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$$

なので, $\triangle ABC$ は正三角形である. ■

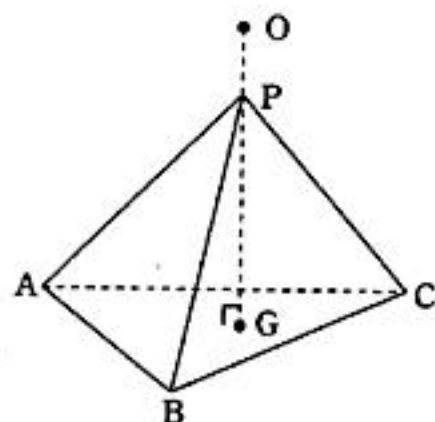
三角形の面積の公式より,

$$S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{2t^2 - 2t + 2} \cdot \sqrt{2t^2 - 2t + 2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} (t^2 - t + 1) \quad \dots\dots \text{[答]}$$

(2) $\triangle ABC$ の重心は $G \left(\frac{1+t}{3}, \frac{1+t}{3}, \frac{1+t}{3} \right)$ である.

したがって,

$$\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{3-t}{9} \\ \frac{3-t}{9} \\ \frac{3-t}{9} \end{pmatrix} = \frac{3-t}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



これと, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix}$ の内積をとると共に 0 なので,

$\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{PG} \perp \overrightarrow{AC}$ ■

(3) 上の小問の結論より, 底面 ABC は PG と直交するので,

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{3} S(t) |\overrightarrow{PG}| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (t^2 - t + 1) \cdot \frac{3-t}{9} \sqrt{3} \\ &= \frac{1}{18} (3-t)(t^2 - t + 1) \\ &= \frac{1}{18} (-t^3 + 4t^2 - 4t + 3) \end{aligned}$$

$$V'(t) = \frac{1}{18} (-3t^2 + 8t - 4) = \frac{-1}{18} (3t-2)(t-2)$$

なので, $V'(t) = 0$ の解は, $t = \frac{2}{3}, 2$ である.

問題の条件

$0 \leq t \leq 1$ より, 増減表は右の通り.

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$V'(t)$	$-\frac{2}{9}$	-	0	+	$\frac{1}{18}$
$V(t)$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	$\frac{49}{486}$	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$

この表より, 最小値は $V\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{49}{486}$ であり, これを与える t は $\frac{2}{3}$ [答]

(1) 1回目の移動で B, D へ確率 $\frac{1}{2}$ ずつで移る.

2回目の移動で, B, D から A へ確率 $\frac{1}{2}$ ずつで移ってくるので,

A に来る確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

B, D から C へ移ってくる確率も同じ.

3回目の移動で, A, C から B へ確率 $\frac{1}{2}$ ずつで移ってくるので, 確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

A, C から D へ移ってくる確率も同じ.

4回目の移動は, 2回目の移動と全く同じ状況になる.

以上をまとめると, 右の表のようになる.

	2	3	4
A	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
B	0	$\frac{1}{2}$	0
C	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
D	0	$\frac{1}{2}$	0

..... [答]

(2) 1回目の移動で B へ確率 p で, D へ確率 $1-p$ で移る.

2回目の移動で, B から A へ確率 $1-p$ で, D から A へ確率 p で移ってくるので, A に来る確率は $2p(1-p)$

B から C へ確率 p で, D から C へ確率 $1-p$ で移ってくるので, C に来る確率は $p^2 + (1-p)^2$

3回目の移動で, A から B へ確率 p で, C から B へ確率 $1-p$ で移ってくるので, A に来る確率は

$$2p^2(1-p) + (1-p)\{p^2 + (1-p)^2\} = 3p^2(1-p) + (1-p)^3$$

A から D へ確率 $1-p$ で, C から D へ確率 p で移ってくるので, D に来る確率は

$$2p(1-p)^2 + p\{p^2 + (1-p)^2\} = p^3 + 3p(1-p)^2$$

以上を表にまとめると, 下のようになる.

	1回目	2回目	3回目
A	0	$2p(1-p)$	0
B	p	0	$3p^2(1-p) + (1-p)^3$
C	0	$p^2 + (1-p)^2$	0
D	$1-p$	0	$p^3 + 3p(1-p)^2$

2回目の場合, (C にいる確率) - (A にいる確率) は

$$\{p^2 + (1-p)^2\} - \{2p(1-p)\} = \{p - (1-p)\}^2 = (2p-1)^2 > 0$$

よって, C にいる確率が最大. ■

3回目の場合, (D にいる確率) - (B にいる確率) は

$$\{p^3 + 3p(1-p)^2\} - \{3p^2(1-p) + (1-p)^3\} = \{p - (1-p)\}^3 = (2p-1)^3 > 0$$

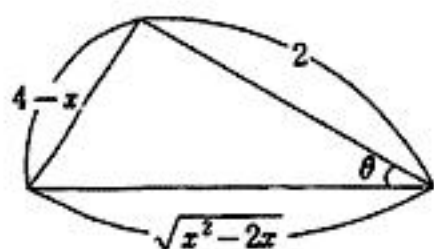
よって, D にいる確率が最大. ■

(1) (i) 辺の長さは正なので $4-x > 0$ より $x < 4$

$\sqrt{x^2-2x}$ が最大辺の長さであることから,

(ii) $4-x \leq \sqrt{x^2-2x}$ より

$$\begin{aligned}(4-x)^2 \leq x^2-2x &\iff 16 \leq 6x \\ &\iff \frac{8}{3} \leq x\end{aligned}$$



(iii) $2 \leq \sqrt{x^2-2x}$ より

$$\begin{aligned}4 \leq x^2-2x &\iff 0 \leq x^2-2x-4 \\ &\iff x \leq 1-\sqrt{5} \text{ または } 1+\sqrt{5} \leq x\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii) より $1+\sqrt{5} \leq x < 4$ である.

このとき, $4-x < 2 \leq \sqrt{x^2-2x}$ となる.

三角形の成立条件より,

$$\begin{aligned}2-(4-x) &< \sqrt{x^2-2x} < 2+(4-x) \\ \iff (x-2)^3 &< x^2-2x < (6-x)^2 \\ \iff -2x+4 &< 0 < -10x+36 \\ \iff 2 &< x < \frac{18}{5}\end{aligned}$$

以上を合わせて, $1+\sqrt{5} \leq x < \frac{18}{5}$ [答]

(2) 余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{(x^2-2x) + 2^2 - (4-x)^2}{2\sqrt{x^2-2x} \cdot 2} = \frac{6x-12}{4\sqrt{x^2-2x}} = \frac{3}{2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

(3) 上の最後の式より, $(\cos \theta \text{ が最小}) \iff (x \text{ が最小})$ である.

$x = 1+\sqrt{5}$ を $\cos \theta = \frac{3}{2} \frac{x-2}{\sqrt{x(x-2)}}$ に代入して,

$$\cos \theta = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{(1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{4} \text{ [答]}$$