

(1) $f(x) = xe^x$ なので, $f'(x) = (x+1)e^x$, $f''(x) = (x+2)e^x$.

$x \geq 0$ のとき $f''(x) > 0$ なので, $y = f(x)$ のグラフは下に凸である.

よって, 接線はグラフの下側にあるので, $f(x) \geq g(x)$ となる. ■

(2) 中点で最小になるので, $p = \frac{L}{2}$. …… [答]

証明

$$S(p) = \int_0^L f(x) - \{f'(p)(x-p) + f(p)\} dx = \int_0^L f(x) dx - f'(p) \frac{(L-p)^2}{2} + f'(p) \frac{p^2}{2} - f(p)L$$

である. よって

$$\begin{aligned} S'(p) &= 0 - \left\{ f''(p) \frac{(L-p)^2}{2} - f'(p)(L-p) \right\} + \left\{ f''(p) \frac{p^2}{2} + f'(p)p \right\} - f'(p)L \\ &= f''(p) \frac{2pL - L^2}{2} = Lf''(p) \left(p - \frac{L}{2} \right) \end{aligned}$$

よって, 増減表を考えると証明された.

(1) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおき,

$$\begin{aligned} f(X) &= XB - BX + C \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c & a+pb-d-1 \\ -pc-1-p & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおく. $A_{n+1} = f(A_n)$ である. したがって,

$$A_2 = f(A_1) = f(A) = \begin{pmatrix} 1 & p+1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \text{〔答〕}$$

$$A_3 = f(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & p^2+p+1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \text{〔答〕}$$

である.

(2) 自然数 n に対して, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & p^{n-1} + \dots + p^2 + p + 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ となることを n に関する数学的帰納法で証明する.

[1] $n=1$ のとき $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ なので, 確かに成立している.

[2] $n=k$ ($k \geq 1$) のとき, 成立を仮定する. つまり, $A_k = \begin{pmatrix} 1 & p^{k-1} + \dots + p^2 + p + 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ であることを仮定する.

$$A_{k+1} = f(A_k) = \begin{pmatrix} 1 & p(p^{k-1} + \dots + p^2 + p + 1) + 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p^k + \dots + p^3 + p^2 + p + 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

なので, $n=k+1$ のときも成立する.

[1], [2] より, 任意の n に対して $A_n = \begin{pmatrix} 1 & p^{n-1} + \dots + p^2 + p + 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ が成立する.

$$\Delta_n = 1(-1) - (p^{n-1} + \dots + p^2 + p + 1)(-1) = p^{n-1} + \dots + p^2 + p = p + p^2 + \dots + p^{n-1} = \frac{p - p^n}{1 - p}$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p - p^n}{1 - p} = \frac{p}{1 - p} \quad \dots\dots \text{〔答〕}$$

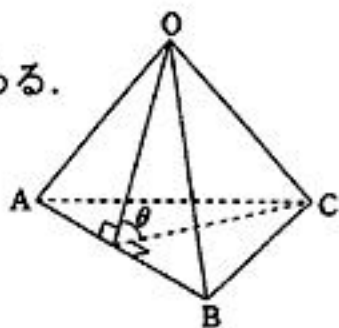
(1) $D(0, 0, b)$ である. また,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -2b \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} \quad \text{である.}$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{なので,} \quad \overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB} \quad \blacksquare$$

$\triangle ABC$ の面積を S とおくと,

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times DC = \frac{1}{2} (2\sqrt{2}a) \sqrt{2a^2 + 4b^2} = 2a\sqrt{a^2 + 2b^2} \quad \dots\dots \text{【答】}$$



$$(2) \cos \theta = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DO}}{|\overrightarrow{DC}| |\overrightarrow{DO}|} = \frac{2b^2}{\sqrt{2a^2 + 4b^2} \cdot b} = \frac{2b}{\sqrt{2a^2 + 4b^2}} \quad \text{である. よって,}$$

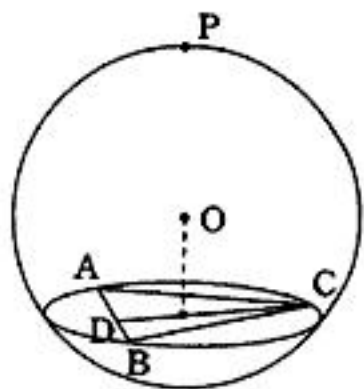
$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4b^2}{2a^2 + 4b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} \quad \dots\dots \text{【答】}$$

面 DCO が直線 AB と直交していることが (1) の前半より分かる. OH は面 ABC に直交するので, OH は AB に直交する. よって, OH は面 DCO 上に乗る. H は面 ABC 上にもあるので, H は面 DCO と面 ABC の交線 DC 上に乗る. 直角三角形 DHO に着目すると,

$$OH = DO \sin \theta = b \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} \quad \dots\dots \text{【答】}$$

(3) 球面 S の半径は $r = OA = \sqrt{2a^2 + b^2}$ である. ABCP の底面を ABC としたときの高さの最大値は $OH + r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} + \sqrt{2a^2 + b^2}$ なので, 体積の最大値は,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \left(2a\sqrt{a^2 + 2b^2} \right) \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} + \sqrt{2a^2 + b^2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(a^2b + a\sqrt{a^2 + 2b^2}\sqrt{2a^2 + b^2} \right) \quad \dots\dots \text{【答】} \end{aligned}$$



(1) 判別式が正より $b^2 - 4ac > 0$ なので, $ac < \frac{b^2}{4}$

b の最大値は 6 なので, $ac \leq 8$. あとは,
しらみ潰しに数えると, 右の表のようになる.

ac の値	1	2	3	4	5	6	7	8
(a, c) の個数	1	2	2	3	2	4	0	2

この表より, ac の取りうる値は 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 [答]

$ac = 1$ のとき 1 通り, $ac = 2, 3, 5, 8$ のとき 2 通り, $ac = 4$ のとき 3 通り, $ac = 6$ のとき 4 通り [答]

(2) 解の公式より $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ である. これが異なる 2 つの有理数解であるための必要十分条件は $b^2 - 4ac$ が正の平方数であることなので,

$$b^2 - 4ac = n^2 \iff \frac{b^2 - n^2}{4} = ac$$

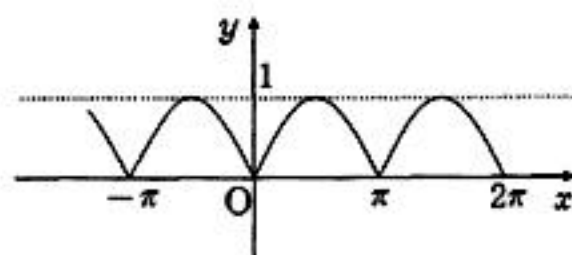
$n < b$ であり, b と n の奇偶が一致していることが必要なので, (b, n) の組を絞り込むと右の表のようになる.

b	3	4	5	5	6	6
n	1	2	1	3	2	4
ac	2	3	6	4	8	5

よって, 求める確率は

$$\frac{2+2+4+3+2+2}{6^3} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} \quad \dots\dots [答]$$

(1) $y = \sin x$ のグラフの x 軸より下側にある部分を上側に折り返したものが $y = |\sin x|$ のグラフとなる。(右図)



$|\sin x|$ の基本周期を p とおくと, $|\sin(x+p)| = |\sin x|$ (あ) である.

$x=0$ を代入すると, $|\sin p| = |\sin 0| = 0$. よって, p は π の倍数である. $p = \pi$ を代入すると, (あ) 式が成り立つので, π が $|\sin x|$ の基本周期である. [答]

$$(2) p \text{ が周期なので, } f\left(-\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2} + p\right) = f\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$f(x) \text{ が奇関数なので, } f\left(-\frac{p}{2}\right) = -f\left(\frac{p}{2}\right)$$

$$\text{この2式を辺々足して2で割ると } f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$$

$$\text{この2式を辺々引いて2で割ると } f\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \text{ を得る. } \blacksquare$$

$$f\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \text{ より } \left|\sin \frac{mp}{2}\right| \sin \frac{np}{2} = 0$$

(i) $\sin \frac{np}{2} = 0$ のとき, $\frac{np}{2}$ は π の倍数なので, np は 2π の倍数.

$f(x+p) = f(x)$ より

$$|\sin m(x+p)| \sin n(x+p) = |\sin mx| \sin nx$$

$$\iff |\sin(mx+mp)| \sin(nx+np) = |\sin mx| \sin nx \quad \dots\dots (い)$$

np が 2π の倍数の場合, (い) 式は, $|\sin(mx+mp)| \sin nx = |\sin mx| \sin nx$ となる.

よって, nx が π の倍数でないとき, $|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$ となる.

両辺とも連続関数なので, 全ての x に対して $|\sin(mx+mp)| = |\sin mx|$ となる.

$|\sin x|$ の基本周期が π であることから, mx を一塊としてみると, mp は π の倍数であることが分かる.

(ii) $\sin \frac{mp}{2} = 0$ のとき, $\frac{mp}{2}$ は π の倍数なので, mp は 2π の倍数である.

したがって, mp は π の倍数.

mp が 2π の倍数の場合, (い) 式は, $|\sin mx| \sin(nx+np) = |\sin mx| \sin nx$ となる.

よって, mx が π の倍数でないとき, $\sin(nx+np) = \sin nx$ となる.

両辺とも連続関数なので, 全ての x に対して $\sin(nx+np) = \sin nx$ となる.

$\sin x$ の基本周期が 2π であることから, nx を一塊としてみると, np は 2π の倍数であることが分かる.

(i),(ii) のいずれの場合も, mp は π の倍数, np は 2π の倍数である. $\blacksquare$

(3) $mp = a\pi$ (う), $np = 2b\pi$ (a, b は整数) とおける. π を消去すると,

$$2mbp = anp \iff 2mb = an$$

an は m の倍数であり, n と m は互いに素なので, a が m の倍数となる.

(う) 式より p は π の倍数である. (い) 式に $p = \pi$ を代入すると,

$$|\sin(mx+m\pi)| \sin(nx+n\pi) = |\sin mx| \sin nx$$

$$\iff |\sin mx| \times (-1)^n \sin nx = |\sin mx| \sin nx$$

この式から $f(x)$ の基本周期は, n が偶数のとき π , n が奇数のとき 2π [答]