

[1]

(1)

$$a_1 = \cos 2 \cos 1 = \frac{\cos 2 \cos 1 \sin 1}{\sin 1} = \frac{\cos 2 \sin 2}{2 \sin 1} = \frac{\sin 4}{4 \sin 1}$$

(証明終)

(2)

数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき, (1)より成り立つ。

[2] $n=k$ ($k \geq 1$) のとき成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \cos 2^{k+1} \cos 2^k \times \cdots \times \cos 1 \\ &= \cos 2^{k+1} a_k \\ &= \cos 2^{k+1} \times \frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1} \sin 1} \\ &= \frac{2 \sin 2^{k+1} \cos 2^{k+1}}{2^{k+2} \sin 1} \\ &= \frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2} \sin 1} \end{aligned}$$

より $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1][2]よりすべての自然数 n に対して, 与式が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$$\frac{\pi}{4} < 1 \left(< \frac{\pi}{2} \right) \text{より } \sin \frac{\pi}{4} < \sin 1 \text{ である。}$$

$$\text{よって } (0 <) \frac{1}{\sin 1} < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \text{ となる。}$$

よって(2)の結果より

$$a_n < \frac{\sqrt{2} \sin 2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

となり $\sin 2^{n+1} \leq 1$ なので

$$a_n < \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

となる。

(証明終)

[2]

(1)

$(x^2)' = 2x$ なので $x = p$ における接線の傾きは $2p$ となる。

[1] $p = 0$ のとき

接線は x 軸に平行なので、法線は y 軸に平行となる。

点 $P(0, 0)$ を通ることから、法線の式は $x = 0$ である。

[2] $p \neq 0$ のとき

法線は接線と直交するので、傾きの積は -1 である。

よって

$$y = -\frac{1}{2p}(x-p) + p^2 = -\frac{1}{2p}x + \frac{1}{2} + p^2$$

となる。

(答) $p = 0$ のとき $x = 0$

$$p \neq 0 \text{ のとき } y = -\frac{1}{2p}x + \frac{1}{2} + p^2$$

(2)

a の値にかかわらず、点 $(0, a)$ を直線 $x = 0$ は通る。

したがって、常に 1 本以上はある。

直線 $y = -\frac{1}{2p}x + \frac{1}{2} + p^2$ が点 $(0, a)$ を通るので

$$a = \frac{1}{2} + p^2$$

である。よって

$$a < \frac{1}{2} \text{ のとき } p \text{ は存在しないので 1 本}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ のとき } p = 0 \text{ のみ, つまり } x = 0 \text{ のみなので 1 本}$$

$$a > \frac{1}{2} \text{ のとき } p = \pm \sqrt{a - \frac{1}{2}} \text{ なので 3 本}$$

となる。

以上より $a \leq \frac{1}{2}$ のとき 1 本, $a > \frac{1}{2}$ のとき 3 本である。

(答) $a \leq \frac{1}{2}$ のとき 1 本, $a > \frac{1}{2}$ のとき 3 本

[3]

(1)

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = |\overline{OB}| |\overline{OC}| \cos 45^\circ = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

(答) 1

(2)

内積の表を作ると以下のようになる。

	$\overline{OA}$	$\overline{OB}$	$\overline{OC}$	$\overline{OD}$	$\overline{OE}$
$\overline{OA}$	1	0	-1	-1	0
$\overline{OB}$	0	1	1	-1	-1
$\overline{OC}$	-1	1	2	0	-1
$\overline{OD}$	-1	-1	0	2	1
$\overline{OE}$	0	-1	-1	1	1

上の表の 25 個の中で 1 の個数は 7 個ある。

よって求める確率は $\frac{7}{25}$ となる。

(答) $\frac{7}{25}$

(3)

CD の中点を M とおくと $\overline{OC} + \overline{OD} = 2\overline{OM}$ である。

さて $q_1 q_2 \cdots q_n = 0$ となるとき、 $q_1, q_2, \dots, q_n$ のうち少なくとも 1 つは 0 となる。

よってある i について

$$\begin{aligned} \overline{OP_i} \cdot (\overline{OC} + \overline{OD}) &= 0 \Leftrightarrow \overline{OP_i} \perp \overline{OC} + \overline{OD} \\ &\Leftrightarrow \overline{OP_i} \perp \overline{OM} \end{aligned}$$

が成り立つ

つまりある i について、 $P_i = B$ または $P_i = E$ が成り立つ。

よって、余事象は常に A, C, D のいずれか出る場合であるから、余事象の確率は $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ である。

よって求める確率は $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$ となる。

(答) $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$

[4]

(1)

$y' = 2x$ なので点 $(a_1, a_1^2 - 1)$ における接線は

$$y = 2a_1(x - a_1) + a_1^2 - 1 = 2a_1x - a_1^2 - 1$$

である。

$y = 0$ を代入すると x 切片は $x = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right)$ となる。

よって $a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right)$ となる。

$$(答) \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{1}{a_1} \right)$$

(2)

条件より $a_1 > 1$ である。

ここで $a_n > 1$ と仮定する。

このとき、(1)と同様にして $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ である。

すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) - 1 \\ &= \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n} > 0 \end{aligned}$$

となるので、 $a_{n+1} > 1$ が成立する。

よって帰納的に任意の n について a_n は定義され、 $a_n > 1$ となる。

(証明終)

(3)

(2)より

$$\frac{a_{n+1} - 1}{2} = \left(\frac{a_n - 1}{2} \right)^2 \frac{1}{a_n}$$

であり、 $a_n > 1$ なので

$$\frac{a_{n+1} - 1}{2} < \left(\frac{a_n - 1}{2} \right)^2$$

となる。

よって $b_{n+1} < b_n^2$ である。

(証明終)

(4)

(3)より $b_n < b_{n-1}^2 < b_{n-2}^{2^2} < \dots < b_1^{2^{n-1}}$ であるから

$$b_1^{2^{n-1}} < 10^{-12} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす n を求めればよい。

$$b_1 = \frac{1}{2}(a_1 - 1) = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n-1}} < 10^{-12}$$

$$\Leftrightarrow -2^{n-1} \log_{10} 2 < -12$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} > \frac{12}{\log_{10} 2}$$

となり、 $\log_{10} 2 = 0.301$ とすると

$$2^{n-1} > \frac{12}{0.301} = 39.86\dots$$

となる。

よって $n = 7$ は $b_n < 10^{-12}$ をみたす。

(答) $n = 7$