

[1]

$$(1) \quad f(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1}, \quad f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = e^x(e^x + 1)^{-2}$$

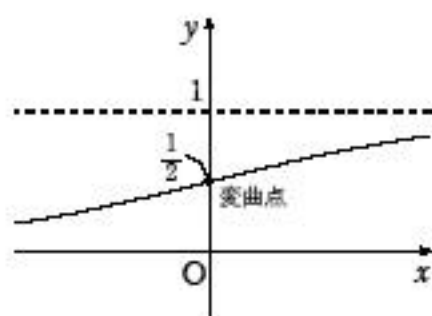
$$f''(x) = e^x(e^x + 1)^{-2} + e^x(-2)(e^x + 1)^{-3}(e^x + 1)^1$$

$$= \frac{e^x(e^x + 1) - 2(e^x)^2}{(e^x + 1)^3}$$

$$= \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

x	$-\infty$	$\dots$	0	$\dots$	∞
f'		$+$	$+$	$+$	
f''		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	1

左の表より
グラフは
右図になる.
漸近線は,
 $y = 0, y = 1$



.....(答)

$$(2) \quad y = \frac{e^x}{e^x + 1} \iff (y - 1)e^x = -y$$

$$\text{よって, } e^x = \frac{y}{1 - y}$$

$$\therefore x = \log \frac{y}{1 - y}$$

x と y を入れかえて,

$$y = \log \frac{x}{1 - x} \quad \text{これが } f^{-1}(x)$$

.....(答)

$$(3) \quad (\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \log \frac{\frac{1}{n+2}}{1 - \frac{1}{n+2}} - \log \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\log \frac{1}{n+1} - \log \frac{1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{n}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \log \frac{1}{e} = -1$$

.....(答)

[2]

(1) (i) 1である確率.

最初が k 以下 かつ 1でなく, 次が1ならよいので,

$$\frac{k-1}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k-1}{90} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(ii) 10である確率.

最初が10 又は, 最初が k 以下 かつ 10でなく,
次が10ならよいので,

$$\frac{1}{10} + \frac{k}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{k+9}{90} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) i ($1 \leq i \leq k$) である確率.

(1) (i) と同様にして $\frac{k-1}{90}$

j ($k+1 \leq j \leq n$) である確率.

(1) (ii) と同様にして $\frac{k+9}{90}$

確率分布表は次の通り.

得点	1	...	k	$k+1$	...	10	計
確率	$\frac{k-1}{90}$	...	$\frac{k-1}{90}$	$\frac{k+9}{90}$	...	$\frac{k+9}{90}$	1

$\dots\dots(\text{答})$

(3) 求める期待値を E とおくと,

$$\begin{aligned}
 E &= 1 \times \frac{k-1}{90} + \dots + k \times \frac{k-1}{90} + (k+1) \times \frac{k+9}{90} + \dots + 10 \times \frac{k+9}{90} \\
 &= \frac{(k+1)k(k-1)}{2 \times 90} + \frac{(k+11)(10-k)(k+9)}{2 \times 90} \\
 &= \frac{k^3 - k}{180} + \frac{(-k^2 - k + 110)(k+9)}{180} \\
 &= \frac{-10k^2 + 100k + 990}{180} \\
 &= \frac{-k^2 + 10k + 99}{18} \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

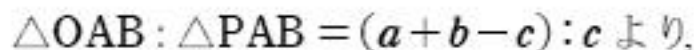


直角三角形の相似より,

$$AQ : QB = a : b$$

内分点の公式から

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b} \quad \dots\dots(\text{答})$$



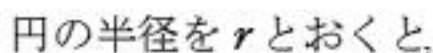
左図で, $h_0 : h_p = (a + b - c) : c$

直角三角形の相似より,

$$OQ : QP = (a + b - c) : c$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{a+b}{a+b-c} \overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{b\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}}{a+b-c} \quad \dots\dots(\text{答})\end{aligned}$$



$$\triangle OAP = \frac{3r}{2}, \triangle OBP = \frac{5r}{2}, \triangle PAB = \frac{6r}{2}$$

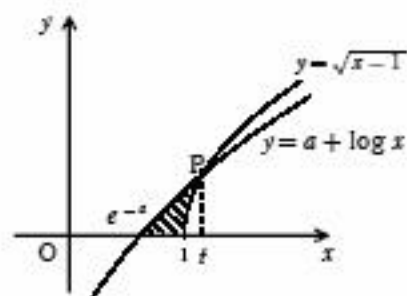
なので、

$$a = \frac{3r}{2}, \quad b = \frac{5r}{2}, \quad c = \frac{6r}{2} \quad \text{である.}$$

(2) の答に代入して,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{\frac{5}{2}r\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}r\overrightarrow{OB}}{\frac{3}{2}r + \frac{5}{2}r - \frac{6r}{2}} \\ &= \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3+5-6} \\ &= \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{2}\end{aligned}\quad \dots\dots(\text{答})$$

(1)



$$(a + \log x)' = \frac{1}{x}, \sqrt{x-1}' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{ である.}$$

点Pの x 座標を t とおくと,

$$\begin{cases} a + \log t = \sqrt{t-1} \end{cases} \dots\dots ①$$

$$\begin{cases} \frac{1}{t} = \frac{1}{2\sqrt{t-1}} \end{cases} \dots\dots ②$$

②式より,

$$t = 2\sqrt{t-1} \iff t^2 = 4(t-1)$$

かつ

$$t \geq 1 \iff t = 2$$

これを①式に代入して

$$a = 1 - \log 2 \dots\dots (\text{答})$$

$$P(2, 1) \dots\dots (\text{答})$$

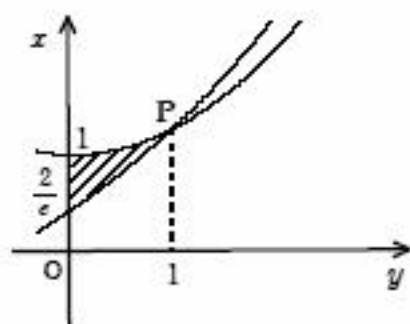
における接線は、②より傾きが $\frac{1}{2}$ であることから,

$$y = \frac{1}{2}x \dots\dots (\text{答})$$

(2) $h(x) = (1 - \log 2 + \log x) - \sqrt{x-1}$ とおくと,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$\therefore h'(x) = \frac{2\sqrt{x-1} - x}{2x\sqrt{x-1}} = \frac{-(\sqrt{x-1} - 1)^2}{2x\sqrt{x-1}} < 0$$

なので、 $h(x)$ は単調減少. $\therefore h(x) = 0$ の解は、あったとしても唯一. $h(2) = 0$ より $x = 2$ が唯一の解となる. $\therefore$ 共有点は、点Pのみ. (証明終り)(3) $x = e^{y-a} = e^{y+\log 2-1} = \frac{2}{e}e^y$, $x = y^2 + 1$ と逆算できる.

$$\int_0^1 \left\{ (y^2 + 1) - \frac{2}{e}e^y \right\} dy$$

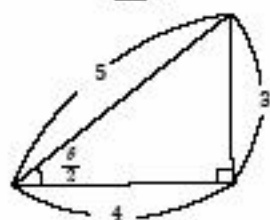
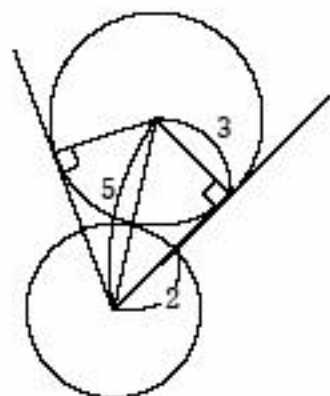
$$= \left[\frac{y^3}{3} + y - \frac{2}{e}e^y \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 1 - 2 \right) - \left(-\frac{2}{e} \right)$$

$$= \frac{2}{e} - \frac{2}{3} \dots\dots (\text{答})$$

[5]

(1)



三平方の定理より, 左図の

直角三角形において, 底辺の長さは

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\begin{aligned}\sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{24}{25}\end{aligned}$$

.....(答)

(2) 直角三角形の鋭角なので, $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$

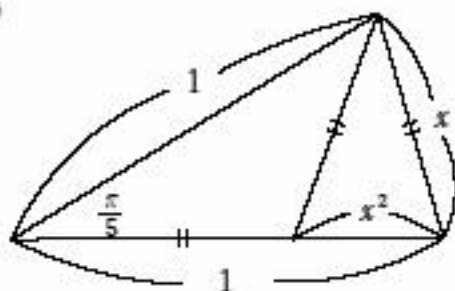
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \dots$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{から} \quad \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(証明終り)

(3)



左図の二等辺三角形において,

$$x + x^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad x > 0 \quad \text{から}$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{5} &= x + \frac{x^2}{2} = x + \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{2.236 \dots + 1}{4} \\ &= 0.809 \dots\end{aligned}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \dots$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} > \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{から} \quad \frac{\pi}{5} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{2\pi}{5} < \theta < \frac{2\pi}{4} \quad \therefore \text{最大個数は 4 個}$$

.....(答)