平成20年度入学試験問題

数　　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚（ $\boxed{13}$ から $\boxed{17}$ まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の2箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. 経済学部経済工学科の配点は，表示されているものの $\frac{7}{5}$ です。
7. 試験終了後，問題冊子は持ち帰って下さい。

[1] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{13}}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

$f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ。

[2] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{14}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り，2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 2 以上 9 以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

[3] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{15}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

$\triangle$OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる。ただし，点 P は 点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形 $\triangle$OAP, $\triangle$OBP，$\triangle$ABP の面積をそれぞれ a，b，c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a，b，c を用いて表せ。

(3) 3 辺 OA，OB，AB の長さはそれぞれ 3，5，6 であるとする。点 P を中心とし，3 直線 OA，OB，AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

[4] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 **16** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

$a>0$ に対して，$f(x)=a+\log x \quad (x>0)$，$g(x)=\sqrt{x-1} \quad (x \geqq 1)$ とおく。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l を持つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[5] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{17}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，$0 < \theta < \pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。