

[1]

(1) A を原点, $\overrightarrow{AB}$ を x 軸の正方向, $\overrightarrow{AC}$ を y 軸の正方向とするような座標系を入れる.
座標軸の目盛を $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, となるように切ると, $M(2, 2)$ である.

$\triangle AQR$ は $\triangle ABC$ を $\frac{1}{4}$ に縮小したものである, $Q(1, 0)$, $R(0, 1)$ となる.

$\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ なので, 内積の性質より

$$\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MR} = |\overrightarrow{MQ}| |\overrightarrow{MR}| \cos \angle QMR \iff \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cos \angle QMR$$

$$\iff 2 + 2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cos \angle QMR \iff \cos \angle QMR = \frac{4}{5}, \dots\dots\dots \text{[答]}$$

(2) 倍角公式より

$$\cos(2\angle QMR) = 2\cos^2 \angle QMR - 1 = 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25} = 0.28, \dots\dots\dots \text{①}$$

一方, 内積の性質より

$$\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MB} = |\overrightarrow{MQ}| |\overrightarrow{MB}| \cos \angle QMB \iff \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cos \angle QMB$$

$$\iff -2 + 4 = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{2} \cos \angle QMB$$

$$\iff \cos \angle QMB = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0.316\dots, \dots\dots\dots \text{②}$$

①, ② より $\cos(2\angle QMR) < \cos \angle QMB$ である.

両者の角は 0 から 90° の間なので, $2\angle QMR > \angle QMB$ である. $\dots\dots\dots \text{[答]}$

[2]

(1) AB: $y = -2x + 10$ と直交する直線の傾きは $\frac{1}{2}$ なので,

OC: $y = \frac{1}{2}x$ である.

この2式を連立して, C(4, 2). …… [答]

P(2s + 3t, 6s + 4t) なので

$$|\overrightarrow{CP}|^2 = (2s + 3t - 4)^2 + (6s + 4t - 2)^2. \dots\dots [答]$$

(2) $s = \frac{1}{2}$ のとき,

$$|\overrightarrow{CP}|^2 = (1 + 3t - 4)^2 + (3 + 4t - 2)^2 = (3t - 3)^2 + (4t + 1)^2 = 25t^2 - 10t + 10 = 25\left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + 9.$$

よって, $t = \frac{1}{5}$ のとき, 最小値 9 となる. …… [答]

(3) $s = 1$ のとき,

$$|\overrightarrow{CP}|^2 = (2 + 3t - 4)^2 + (6 + 4t - 2)^2 = (3t - 2)^2 + (4t + 4)^2 = 25t^2 + 20t + 20.$$

$t \geq 0$ で, この2次関数は単調増加なので, $t = 0$ のとき, 最小値 20 となる. …… [答]

[3]

(1) a, b, c の並べ方は全部で ${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$ 通り.

条件を満たすものは,

$c = 3$ のとき $(a, b) = (1, 2), (2, 1),$

$c = 4$ のとき $(a, b) = (1, 3), (3, 1),$

$c = 5$ のとき $(a, b) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1),$

$c = 6$ のとき $(a, b) = (1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1)$ の 12 通り.

よって, $\frac{12}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{10}$. …………… [答]

(2) a, b, c, d の並べ方は全部で ${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ 通り.

条件を満たすものは,

$a + b = 5$ のとき $(a, b, c, d) = (1, 4, 2, 3)$ と a, b を入れ替えたもの, c, d を入れ替えたもの, (a, b) と (c, d) を入れ替えたものの 8 通り.

$a + b = 6$ のとき $(a, b, c, d) = (1, 5, 2, 4)$ とその入れ替えで 8 通り.

$a + b = 7$ のとき $(a, b, c, d) = (1, 6, 2, 5), (1, 6, 3, 4), (2, 5, 3, 4)$ とその入れ替えで $8 + 8 + 8 = 24$ 通り.

$a + b = 8$ のとき $(a, b, c, d) = (2, 6, 3, 5)$ とその入れ替えで 8 通り.

$a + b = 9$ のとき $(a, b, c, d) = (3, 6, 4, 5)$ とその入れ替えで 8 通り.

合計 56 通り.

よって, $\frac{56}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{14}{6 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{7}{45}$. …………… [答]

[4]

(1) $y' = 2x$ なので $P(a, a^2)$ における接線 L_1 は

$$L_1: y = 2a(x - a) + a^2 \iff y = 2ax - a^2.$$

同様に、 $Q(b, b^2)$ における接線 L_2 は

$$L_2: y = 2b(x - b) + b^2 \iff y = 2bx - b^2.$$

L_1 と L_2 を連立して、 $R\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$. …… [答]

$$\overrightarrow{RQ} = \left(\frac{b-a}{2}, b^2-ab\right), \overrightarrow{RP} = \left(\frac{a-b}{2}, a^2-ab\right) \text{ なので、公式より}$$

$$\begin{aligned} \Delta PRQ &= \frac{1}{2} \left| \frac{b-a}{2}(a^2-ab) - \frac{a-b}{2}(b^2-ab) \right| = \frac{1}{4} |(b-a)(-a)(b-a) + (b-a)b(b-a)| \\ &= \frac{1}{4}(b-a)^3. \dots\dots [答] \end{aligned}$$

(2) 求める面積は ΔPSQ の面積 S_1 と

線分 PQ と $y = x^2$ のグラフで囲まれた部分の面積 S_2 の和である.

前小問より、

$$S_1 = \Delta PRQ = \frac{1}{4}(b-a)^3.$$

$$\frac{1}{6} \text{ 公式より } S_2 = \frac{1}{6}(b-a)^3.$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{4}(b-a)^3 + \frac{1}{6}(b-a)^3 = \frac{5}{12}(b-a)^3. \dots\dots [答]$$

(3) RP の傾きは $2a$, RQ の傾きは $2b$ なので、

$$RP \perp RQ \iff (2a)(2b) = -1 \iff a = -\frac{1}{4b}.$$

$$\text{これを前小問の答えに代入して、} \frac{5}{12} \left(b + \frac{1}{4b}\right)^3. \dots\dots \textcircled{1}$$

相加相乗平均の不等式より、

$$b + \frac{1}{4b} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{4b}} = 1.$$

等号は $b = \frac{1}{4b}$ ($b > 0$) のとき、つまり $b = \frac{1}{2}$ のときのみ。よって、

面積 ① は $b = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{5}{12}$ となる. …… [答]