

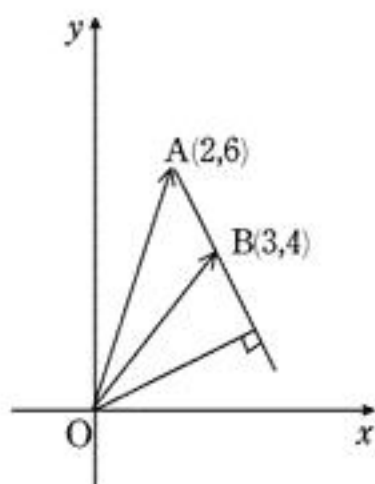
[1]

$$(1) \text{ 直線 } AB: y = -2(x-3) + 4 \\ = -2x + 10 \quad \dots\dots ①$$

原点を通り直線 AB に垂直な直線の
方程式は,

$$y = \frac{1}{2}x \quad \dots\dots ②$$

①, ②の交点を求めて, C(4, 2).....(答)



$$\overrightarrow{OP} = s(2, 6) + t(3, 4) = (2s + 3t, 6s + 4t)$$

となるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}|^2 &= (2s + 3t - 4)^2 + (6s + 4t - 2)^2 \\ &= 4s^2 + 9t^2 + 16 - 16s - 24t + 12st \\ &\quad + 36s^2 + 16t^2 + 4 - 24s - 16t + 48st \\ &= 40s^2 + 25t^2 + 60st - 40s - 40t + 20 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) s : 定数, $t \geq 0$ より $|\overrightarrow{CP}|^2$ を t について整理すると,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}|^2 &= 25t^2 + 20(3s - 2)t + 40s^2 - 40s + 20 \\ &= 25 \left\{ t + \frac{2}{5}(3s - 2) \right\}^2 - 4(3s - 2)^2 + 40s^2 - 40s + 20 \\ &= 25 \left\{ t + \frac{2}{5}(3s - 2) \right\}^2 + 4s^2 + 8s + 4 \end{aligned}$$

(i) $-\frac{2}{5}(3s - 2) \geq 0 \iff s \leq \frac{2}{3}$ のとき,

$t = -\frac{2}{5}(3s - 2)$ で最小で最小値 $4s^2 + 8s + 4$

(ii) $-\frac{2}{5}(3s - 2) < 0 \iff s > \frac{2}{3}$ のとき,

$t = 0$ で最小で最小値 $40s^2 - 40s + 20$

$$\text{以上より, 最小値} = \begin{cases} 4s^2 + 8s + 4 & \left(s \leq \frac{2}{3} \right) \\ 40s^2 - 40s + 20 & \left(s > \frac{2}{3} \right) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

[2]

M ...偶数が書かれたカードの枚数.

N ...奇数が書かれたカードの枚数.

p_n ... n 回繰り返し、記録された n 個の数の和が偶数となる確率

(1) p_1 は 1 回取りその数が偶数である確率であるから

$$p_1 = \frac{M}{M+N} \quad \dots\dots(\text{答})$$

p_2 :

2 回繰り返し、記録された 2 個の数の和が偶数になるのは、

$$\cdot 1 \text{ 回目偶数, } 2 \text{ 回目偶数} \dots \frac{M}{M+N} \cdot \frac{M}{M+N}$$

$$\cdot 1 \text{ 回目奇数, } 2 \text{ 回目奇数} \dots \frac{N}{M+N} \cdot \frac{N}{M+N}$$

の場合で

$$p_2 = \left(\frac{M}{M+N} \right)^2 + \left(\frac{N}{M+N} \right)^2 = \frac{M^2 + N^2}{(M+N)^2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) p_{n+1} は

・ n 回までの和が偶数で、 $n+1$ 回目に偶数が出る確率

$$\dots \frac{M}{M+N} p_n$$

・ n 回までの和が奇数で、 $n+1$ 回目に奇数が出る確率

$$\dots \frac{N}{M+N} (1-p_n)$$

の場合で、これらは互いに排反であるから

$$p_{n+1} = \frac{M}{M+N} p_n + \frac{N}{M+N} (1-p_n)$$

$$\therefore p_{n+1} = \frac{M-N}{M+N} p_n + \frac{N}{M+N} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad M+N=1+2+3+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

(i) $k=2l$ ($l \geq 1, k$: 偶数) のとき、

$$M=2+4+\dots+2l=2(1+2+\dots+l)=2 \cdot \frac{l(l+1)}{2}=l(l+1)$$

$$=\frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{k(k+2)}{4}$$

$$N=1+3+\dots+(2l-1)=\frac{l \cdot (2l)}{2}=l^2=\frac{k^2}{4}$$

$$M-N=\frac{k^2+2k}{4}-\frac{k^2}{4}=\frac{k}{2}$$

$$\therefore \frac{M-N}{M+N}=\frac{1}{k+1}$$

(別解)

$$M-N=\frac{\underbrace{1+1+\dots+1}_{k \text{ 個}}}{k}$$

$$=\frac{k}{2} \text{ としてもよい}$$

(ii) $k=2l-1$ ($l \geq 2, k$: 奇数) のとき、

$$M=2+4+\dots+2(l-1)=2\{1+2+\dots+(l-1)\}=2 \cdot \frac{(l-1) \cdot l}{2}$$

$$=\frac{k-1}{2} \cdot \frac{k+1}{2} = \frac{(k-1)(k+1)}{4}$$

$$N=1+3+\dots+2l-1=\frac{l \cdot (2l)}{2}=l^2=\frac{(k+1)^2}{4}$$

$$M-N=\frac{k^2-1}{4}-\frac{(k+1)^2}{4}=-\frac{k+1}{2}$$

$$\therefore \frac{M-N}{M+N}=-\frac{1}{k}$$

以上より

$$\frac{M-N}{M+N} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & (k: \text{偶数}) \\ -\frac{1}{k} & (k: \text{奇数}) \end{cases}$$

(別解)

$$M-N = \frac{\frac{k-1}{2} \text{ 個}}{1+1+\dots+1} - k$$

$$= \frac{-(k+1)}{2}$$

(4) (1), (2) より

$$p_{n+1} = \frac{M-N}{M+N} p_n + \frac{N}{M+N} \quad \left(p_1 = \frac{M}{M+N} \right)$$

$$\alpha = \frac{M-N}{M+N} \alpha + \frac{N}{M+N}$$

$$\text{をみたす } \alpha \text{ は } \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

辺々を引いて $\alpha = \frac{1}{2}$ を代入すると、

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{M-N}{M+N} \left(p_n - \frac{1}{2} \right)$$

$\left\{ p_n - \frac{1}{2} \right\}$ は公比 $\frac{M-N}{M+N}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{M-N}{M+N} \right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{M-N}{M+N} \right)^n$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{M-N}{M+N} \right)^n + 1 \right\}$$

(3) の結果を代入して、

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{k+1} \right)^n + 1 \right\} & (k: \text{偶数}) \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{k} \right)^n + 1 \right\} & (k: \text{奇数}) \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$[3] C_1: y = \frac{1}{2}x^2, y' = x$$

(1) P, Qにおける法線をそれぞれ l, m とすると

$$l: -a\left(y - \frac{1}{2}a^2\right) = x - a$$

$$l: x + ay = \frac{1}{2}a^3 + a$$

$$m: x + by = \frac{1}{2}b^3 + b$$

辺々を引いて

$$(a-b)y = \frac{1}{2}(a^3 - b^3) + a - b$$

$a \neq b$ より

$$y = \frac{1}{2}(a^2 + ab + b^2) + 1$$

$$x = -ay + \frac{1}{2}a^3 + a = \frac{1}{2}(-a^3 - a^2b - ab^2) - a + \frac{1}{2}a^3 + a$$

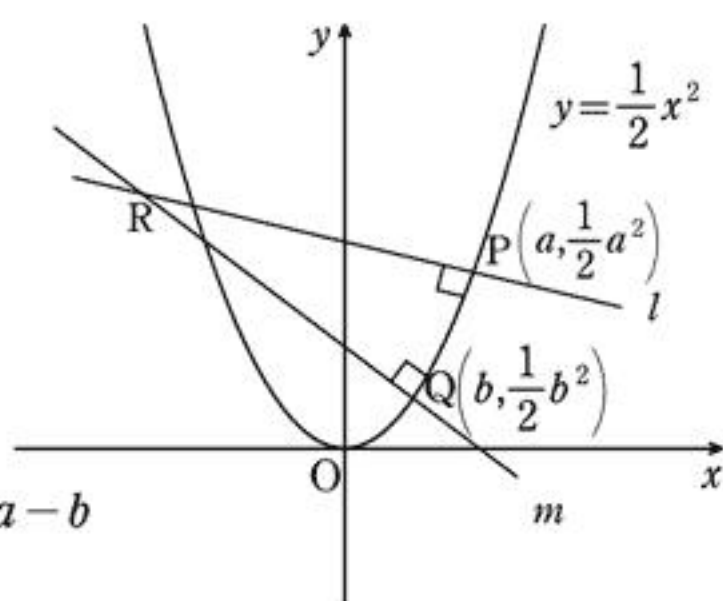
$$= -\frac{1}{2}(a^2b + ab^2)$$

$$R\left(-\frac{1}{2}(a^2b + ab^2), \frac{1}{2}(a^2 + ab + b^2) + 1\right)$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \left\{ -\frac{1}{2}(a^2b + ab^2) \right\} = -a^3$$

$$\lim_{b \rightarrow a} \left\{ \frac{1}{2}(a^2 + ab + b^2) + 1 \right\} = \frac{3}{2}a^2 + 1$$

$$\therefore A\left(-a^3, \frac{3}{2}a^2 + 1\right) \quad \dots\dots(\text{答})$$



(2)

$$C_2: \begin{cases} x = -a^3 \\ y = \frac{3}{2}a^2 + 1 \end{cases} \quad \text{から} \quad y = \frac{3}{2}\left(-x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 1 = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 1$$

$$y' = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad (x \neq 0) \quad \begin{cases} x > 0 \text{ のとき, } y' > 0 \\ x < 0 \text{ のとき, } y' < 0 \end{cases}$$

$$y'' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^4} < 0$$

$$\begin{aligned} \text{[注]} \quad & \lim_{x \rightarrow -0} \frac{dy}{dx} = -\infty \\ & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{dy}{dx} = +\infty \end{aligned}$$

C_1, C_2 の交点の座標は,

$$\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 1 = \frac{1}{2}x^2$$

$$x^{\frac{2}{3}} = t \quad (t > 0) \text{ とおくと,}$$

$$\frac{3}{2}t + 1 = \frac{1}{2}t^3 \iff t^3 - 3t - 2 = 0$$

$$\iff (t+1)^2(t-2) = 0$$

$$t = 2, x^{\frac{2}{3}} = 2 \text{ から } x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore (\pm 2\sqrt{2}, 4) \quad \dots\dots(\text{答})$$

C_1, C_2 のグラフは下図.

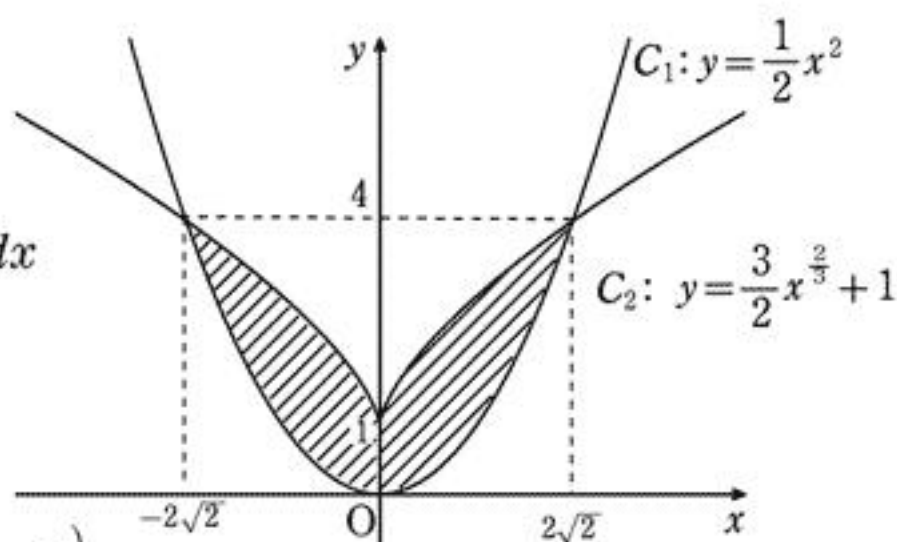
(3) 求める面積は右図の斜線部分の面積に等しい.

$$S = 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 1 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}} + x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^{2\sqrt{2}}$$

$$= 2 \left(\frac{9}{10} \cdot 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \frac{1}{6} \cdot 16\sqrt{2} \right)$$

$$= \frac{88}{15}\sqrt{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$



[4]

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y \neq X, |X| = 1, |Y| = 1, |Z| = 1$$

$$AX = Y, AY = Z, AZ = X \dots\dots(*)$$

(1) $Y \neq -X$

$$(\because) Y = -X \text{ と仮定する. } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおくと,}$$

$$AX = Y \text{ より } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より } a = -1, c = 0$$

$$AY = Z \text{ より } \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ で}$$

$$AZ = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq X$$

これは $AZ = X$ に矛盾. $\therefore Y \neq -X$

別解あり

(2)

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

に対し, s, t の方程式

$$Z = sX + tY \dots\dots(*)$$

を考える.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + ty_1 \\ ty_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

ここで, $y_2 = 0$ とすると, 仮定より Y の大きさが 1 であることから

$$1 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{y_1^2} = |y_1|$$

$$\therefore y_1 = \pm 1$$

$$\therefore Y = \pm X$$

これは仮定 $Y \neq X$ および (1) の結果 $Y \neq -X$ に反するので

$y_2 \neq 0$. したがって,

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{vmatrix} = y_2$$

であることから, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$ には逆行列が存在する. よって

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

となり, 方程式 (*) をみたす (s, t) がただ 1 組存在する.

以上より, 題意が成立する.

別解あり

別解

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y \neq X,$$

$$AX = Y, AY = Z, AZ = X \dots\dots(**)$$

(1) $Y = -X$ とすると,

$$AX = Y \iff AX = -X$$

$$AY = Z \iff -AX = Z \quad \text{これより } Z = X$$

よって, $AZ = AX$

したがって, (**) より

$$Y = AX = AZ = X$$

となり, 仮定に反する.

(2) $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Y = kX (k: \text{実数})$ とすると, (**) より

$$Z = AY = kAX = kY = k^2X$$

$$AZ = k^2AX \iff X = k^3X$$

$$\therefore k^3 = 1$$

$$\therefore k = 1 (\because k: \text{実数})$$

$$\therefore Y = X$$

となり, 仮定に反する. よって, X, Y は 1 次独立であるから,

$Z = sX + tY$ となる実数 s, t がただ 1 組存在する.

(3) (2) より $Z = sX + tY$

$$AZ = s(AX) + t(AY)$$

$$X = sY + tZ$$

$$X = sY + t(sX + tY)$$

$$\iff (st - 1)X + (t^2 + s)Y = O$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} st - 1 + (t^2 + s)y_1 \\ (t^2 + s)y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y_2 \neq 0$ より

$$\begin{cases} t^2 + s = 0 \\ st - 1 = 0 \end{cases} \iff t^3 = -1 \text{ かつ } t = -1, s = -1$$

$$\therefore Z = -X - Y$$

$$\therefore X + Y + Z = O$$

(4) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(3) \text{ より } Z = -X - Y = \begin{pmatrix} -1 - y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

$$|Y| = 1, |Z| = 1 \text{ かつ } \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = 1 \\ (1 + y_1)^2 + y_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって, (i) } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(ii) X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(i) \text{ の場合 } \begin{cases} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff A \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = -\frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(ii) \text{ の場合 } \begin{cases} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff A \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

以上より

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \dots\dots(\text{答})$$

[5]

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$$

$$|\vec{v}| = 1, \frac{dx}{dt} > 0$$

$$(1) \quad P(s, e^s)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}, \frac{dy}{dt} = e^s \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$|\vec{v}| = 1 \iff \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 1 \iff \left\{ 1 + (e^s)^2 \right\} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 1$$

$$\frac{ds}{dt} > 0 \text{ より, } \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}$$

$$\therefore \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}, \frac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}} \right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = -\frac{1}{2} (1+e^{2s})^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{2s} \cdot 2 \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= -\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}$$

$$= \frac{-e^{2s}}{(1+e^{2s})^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{e^s \cdot \sqrt{1+e^{2s}} - e^s \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+e^{2s})^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot e^{2s}}{1+e^{2s}} \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{\left(e^s \cdot \sqrt{1+e^{2s}} - \frac{e^{3s}}{\sqrt{1+e^{2s}}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}}{1+e^{2s}}$$

$$= \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2}$$

$$\therefore \vec{\alpha} = \left(-\frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2}, \frac{e^s}{(1+e^{2s})^2} \right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3)$$

$$|\vec{\alpha}|^2 = \frac{(e^{2s})^2 + (e^s)^2}{(1+e^{2s})^4}$$

$$= \frac{e^{2s}(1+e^{2s})}{(1+e^{2s})^4}$$

$$= \frac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^3}$$

$$e^{2s} = t \text{ とおくと } t > 0 \text{ で}$$

$$f(t) = \frac{t}{(1+t)^3} \text{ とおく.}$$

$$f'(t) = \frac{(1+t)^3 - t \cdot 3(1+t)^2}{(1+t)^6} = \frac{1-2t}{(1+t)^4}$$

$$f'(t) = 0 \text{ なる } t \text{ は } t > 0 \text{ で } t = \frac{1}{2}$$

このとき, $f(t)$ は最大になり $|\vec{\alpha}|$ は最大となる.

$$|\vec{\alpha}| \text{ の最大値} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}} = \sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad \dots\dots(\text{答})$$