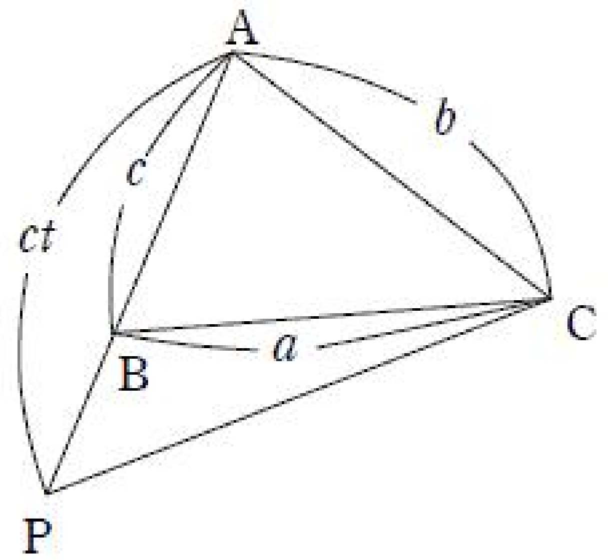
[1]

(1)　余弦定理より,

$$\begin{aligned} \mathrm{CP}^2 &= b^2+(ct)^2-2\cdot b\cdot ct\cos A \\ &= b^2+c^2t^2-2bct\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= ta^2+(1-t)b^2+\left(t^2-t\right)c^2 \end{aligned}$$



(2)　$\mathrm{CP}=a$ より,

$$\mathrm{CP}^2=a^2$$

$$(t-1)a^2+(1-t)b^2+\left(t^2-t\right)c^2=0$$

$$(t-1)\left(a^2-b^2+tc^2\right)=0$$

$$\therefore\ t=1,\ \frac{b^2-a^2}{c^2}$$

$t \geqq 0$ であるから，求める t の値は,

$$\begin{cases} b<a \text{ のとき，} t=1 \\ b \geqq a \text{ のとき，} t=1,\ \dfrac{b^2-a^2}{c^2} \end{cases}$$

(3)　$0 \leqq \dfrac{b^2-a^2}{c^2} < 1$ であればよいので,

$$0 \leqq b^2-a^2 < c^2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b \geqq a \\ c^2+a^2 > b^2 \end{cases}$$

よって，求める条件は,

$\angle\mathrm{B} \geqq \angle\mathrm{A}$ かつ $\angle\mathrm{B}$ が鋭角

[2]

(1) 常に2回振るとき，得点は右の表のようになる．
この36個の値の平均を考えることにより，求める期待値は

$$\frac{2+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot5}{36}=\frac{35}{18}$$

1回目＼2回目	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	0
3	4	5	6	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

(2) 『最初の目が6のとき，2回目を振らない』ということは，『最初の目が6のときも，2回目のサイコロを振り，その目の出方にかかわらず，得点を6点』としてもよい（この競技の得点に影響を与えない）ということである．
このとき，得点は右の表のようになる．
よって，求める期待値は

$$\frac{2+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4+6\cdot11}{36}=\frac{53}{18}$$

1回目＼2回目	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	0
3	4	5	6	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0
6	6	6	6	6	6	6

(3) 1回目のサイコロの目がkのとき，2回目に進んだ場合の得点の期待値をE_kとおく．
得点の期待値を最大にするためには，各kごとに（$k=1, 2, 3, 4, 5, 6$），

$$\begin{cases} \cdot\ E_k > k \implies 2\text{回目を振った方がよい} \\ \cdot\ E_k \leqq k \implies 2\text{回目を振らない方がよい} \end{cases}$$

と戦略を立てればよい．

(i) $k=1$のとき
2回目のサイコロの目と得点の関係は右の通り．

$$\therefore\ E_1=\frac{2+3+4+5+6}{6}=\frac{10}{3}$$

この場合は，$E_1>1$

2回目の目	1	2	3	4	5	6
得点	2	3	4	5	6	0

(ii) $k=2$のとき

$$E_2=\frac{3+4+5+6}{6}=3$$

より，この場合は，$E_2>2$

2回目の目	1	2	3	4	5	6
得点	3	4	5	6	0	0

(iii) $k=3$のとき

$$E_3=\frac{4+5+6}{6}=\frac{5}{2}$$

より，この場合は，$E_3<3$

2回目の目	1	2	3	4	5	6
得点	4	5	6	0	0	0

(iv) $k=4$のとき

$$E_4=\frac{5+6}{6}=\frac{11}{6}$$

より，この場合は，$E_4<4$

2回目の目	1	2	3	4	5	6
得点	5	6	0	0	0	0

(v) $k=5$のとき

$$E_5=\frac{6}{6}=1$$

より，この場合は，$E_5<5$

2回目の目	1	2	3	4	5	6
得点	6	0	0	0	0	0

(vi) $k=6$のとき

$$E_6=0$$

より，この場合は，$E_6<6$

2回目の目	1	2	3	4	5	6
得点	0	0	0	0	0	0

以上，(i)〜(vi)より，得点の期待値は
1回目が2以下の目ならば2回目を振り，
1回目が3以上の目ならば2回目を振らない
とき最大となる．

[3]

(1) $\angle\mathrm{MOB}=2\times\angle\mathrm{MAB}$

$\qquad=2\theta$

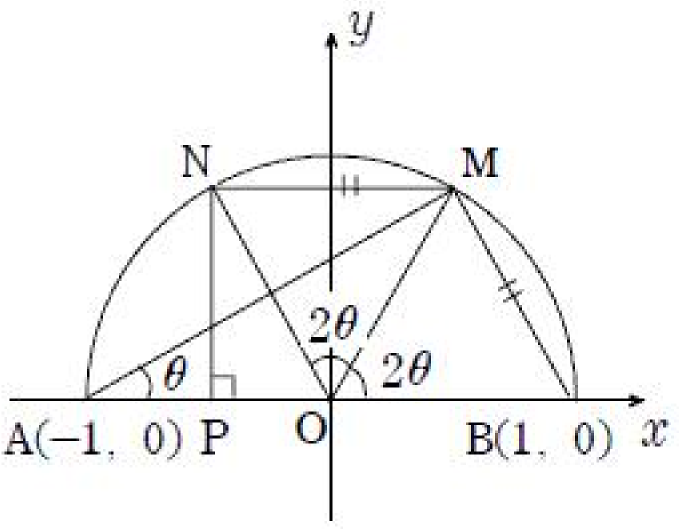
であるから,

$\mathrm{M}(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$

また, $\triangle\mathrm{MAB}$ は $\angle\mathrm{AMB}=90^\circ$ の直角三角形であるから,

$\mathrm{MB}=\mathrm{AB}\times\sin\angle\mathrm{MAB}$

$\qquad=2\sin\theta$



(別解)

$\mathrm{M}(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $\mathrm{B}(1, 0)$ なので,

$$\mathrm{MB}^2=(\cos 2\theta-1)^2+\sin^2 2\theta$$
$$=2(1-\cos 2\theta)$$
$$=4\sin^2\theta$$
$$\therefore\ \mathrm{MB}=2\sin\theta$$

(2) $\angle\mathrm{NOB}=4\theta$ であるから,

$\mathrm{N}(\cos 4\theta, \sin 4\theta)$, $\mathrm{P}(\cos 4\theta, 0)$

これより,

$\mathrm{PB}=1-\cos 4\theta$

(3)
$$\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$$
$$2\sin\theta=1-\cos 4\theta$$
$$2\sin\theta=2\sin^2\theta$$
$$\sin\theta=(2\sin\theta\cos\theta)^2$$
$$\sin\theta=4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$
$$t=4t^2(1-t^2)$$
$$4t^4-4t^2+t=0 \quad \cdots\cdots ①$$

(コメント)

$t\neq 0$ なので,

$$4t^3-4t+1=0$$

まで変形することができる.

(4) $0^\circ<4\theta\leqq 180^\circ$ より, $0^\circ<\theta\leqq 45^\circ$ だから,

$$0<t\leqq\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ②$$

よって, ②の範囲で, t の方程式①の実数解が唯 1 つであることを示せばよい.

$t\neq 0$ より,

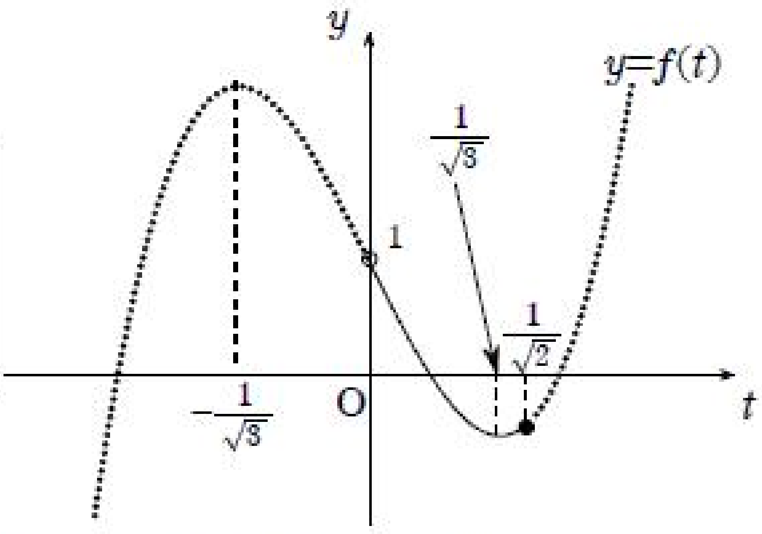
$$① \iff 4t^3-4t+1=0$$

$f(t)=4t^3-4t+1$ とおくと,

$$f'(t)=12\left(t^2-\frac{1}{3}\right)$$

これより, 増減表, グラフは次のようになる.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	(1)	↘	$1-\frac{8}{9}\sqrt{3}$	↗	$1-\sqrt{2}$



したがって, $0<t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ において, $f(t)=0$ となる t は唯 1 つであるので,

$\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ となる点 M は唯 1 つであることが示された.

[4]

(1)　初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから，

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{\{(\text{初項})+(\text{末項})\}\times(\text{項数})}{2}=\frac{(1+n)\times n}{2}=\frac{n}{2}(n+1)$$

(注) (2), (3) のようにやることもできる.

(2)　恒等式

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

に $k=1, 2, 3, \cdots, n$ を代入して和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^3-k^3\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)$$

$$\therefore\ (n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

よって，(1) の結果を利用とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2&=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-1-3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right\}\\&=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n\right\}\\&=\frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

(3)　恒等式

$$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$$

に，$k=1, 2, 3, \cdots, n$ を代入して和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^4-k^4\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(4k^3+6k^2+4k+1\right)$$

$$\therefore\ (n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

よって，(1), (2) の結果を利用すると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^3&=\frac{1}{4}\left\{(n+1)^4-1-6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{(n+1)^4-1-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}\\&=\frac{1}{4}\left(n^4+2n^3+n^2\right)\\&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$