

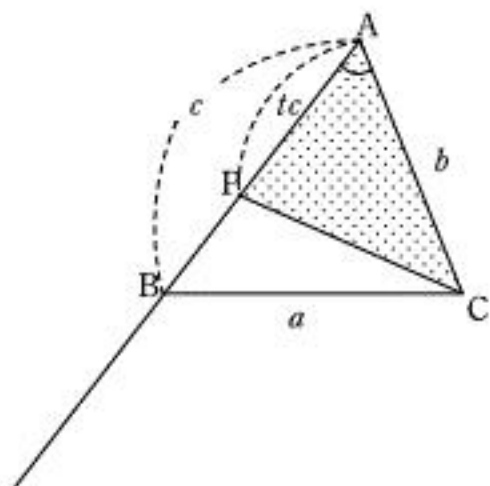
[1]

(1) 余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

△ACPに余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} CP^2 &= b^2 + (tc)^2 - 2b(tc)\cos A \\ &= b^2 + t^2c^2 - \cancel{2bct} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\cancel{2bc}} \\ &= b^2 + t^2c^2 - tb^2 - tc^2 + ta^2 \\ &= ta^2 + (1-t)b^2 - t(1-t)c^2 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$



.....(答)

(2) CP = a のとき

①より, 式を整理して,

$$\begin{aligned} (1-t)a^2 - (1-t)b^2 + t(1-t)c^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-t) \cdot \{a^2 - b^2 + tc^2\} &= 0 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

また条件より $0 \leq t$ より, $a \leq b$ のときのみ, $t = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$ が成り立つ.

$$t = 1, t = \frac{b^2 - a^2}{c^2} \quad (a \leq b \text{ のとき})$$

(3) 辺 AB 上点 P がちょうど 2 つ存在するためには, ②をみたす t が $0 \leq t \leq 1$ に異なる 2 実解をもてばよい. t の 1 つが $t = 1$ であるから,

$$0 \leq \frac{b^2 - a^2}{c^2} < 1 \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 < c^2 + a^2$$

このとき,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0$$

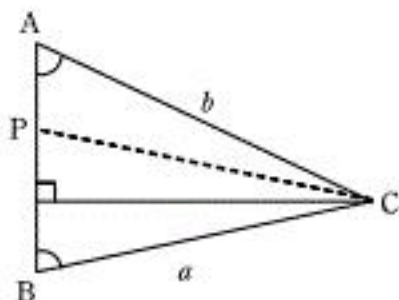
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} > 0 \quad \text{となるから, } A, B \text{ は鋭角.}$$

また, $a \leq b$ であるから $a(c^2 + b^2 - a^2) \geq b(c^2 - (b^2 - a^2))$ から $\cos A \geq \cos B$

$\therefore A \leq B$

以上より, $0 < A \leq B < \frac{\pi}{2}$

.....(答)



〔2〕

(1) 求める期待値は

$$\frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 5}{36} = \frac{70}{36}$$

$$= \frac{35}{18}$$

.....(答)

目数 \ 目	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	0
3	4	5	6	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

(2) 最初 6 の目が出るときの確率は $\frac{1}{6}$ より, 期待値 $6 \times \frac{1}{6} = 1$

他の目のとき,

$$\frac{70}{36} + 1 = \frac{106}{36} = \frac{53}{18}$$

.....(答)

(3) (i) 最初目が 5 以上のとき, 2 回目を振らないとき, 期待値は,

$$\frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 4}{36} + \frac{5 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{6} = \frac{64}{36} + \frac{11}{6} = \frac{130}{36}$$

(ii) 最初目が 4 以上のとき, 2 回目を振らないとき, 期待値は,

$$\frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 3}{36} + \frac{4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{6}$$

$$= \frac{53}{36} + \frac{15}{6} = \frac{143}{36}$$

(iii) 最初目が 3 以上のとき, 2 回目を振らないとき, 期待値は,

$$\frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 2 + 5 \times 2 + 6 \times 2}{36} + \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{6}$$

$$= \frac{38}{36} + \frac{18}{6} = \frac{146}{36}$$

(iv) 最初目が 2 以上のとき, 2 回目を振らないとき, 期待値は,

$$\frac{2 \times 1 + 3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 1}{36} + \frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6}$$

$$= \frac{20}{36} + \frac{20}{6} = \frac{140}{36}$$

以上より得点の期待値を最大にするには,

最初の目が 2 以下のとき, 2 回目を振るとよい.

.....(答)

[3]

$$(1) \quad y = \frac{1}{x^2}, y' = -\frac{2}{x^3}$$

$Q_1\left(t, \frac{1}{t^2}\right)$ における接線は

$$y = -\frac{2}{t^3}(x-t) + \frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^2}x + \frac{3}{t^2}$$

これが $P_1\left(a, \frac{1}{a^2}\right)$ を通ることから, 代入して

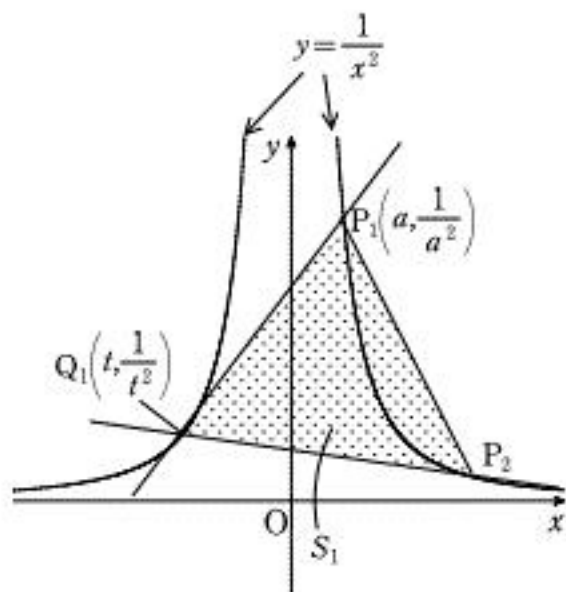
$$\frac{1}{a^2} = -\frac{2}{t^3} \cdot a + \frac{3}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3a^2t + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow (t-a)(t^2 + at - 2a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-a)^2(t+2a) = 0, t = -2a$$

$$\therefore Q_1\left(-2a, \frac{1}{4a^2}\right)$$

.....(答)



(2)

$$Q_1\left(-2a, \frac{1}{4a^2}\right) \text{ のとき, } P_2\left(4a, \frac{1}{16a^2}\right)$$

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \left(-3a, \frac{-3}{4a^2}\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(3a, \frac{-15}{16a^2}\right)$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \left| \frac{45}{16a} + \frac{9}{4a} \right| = \frac{81}{32} \cdot \frac{1}{a}$$

.....(答)

(3)

$$P_n\left(a_n, \frac{1}{a_n}\right) \text{ とおくと, } a_1 = a \text{ で (2) と同様に}$$

$$Q_n\left(-2a_n, \frac{1}{4a_n^2}\right), P_{n+1}\left(4a_n, \frac{1}{16a_n^2}\right)$$

$$S_n = \frac{81}{32} \cdot \frac{1}{a_n}$$

$$\text{ここで, } a_{n+1} = 4a_n \text{ から } a_n = 4^{n-1} \cdot a_1, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$\therefore S_n = \frac{81}{32} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{81}{32 \cdot 4^{n-1} a}$$

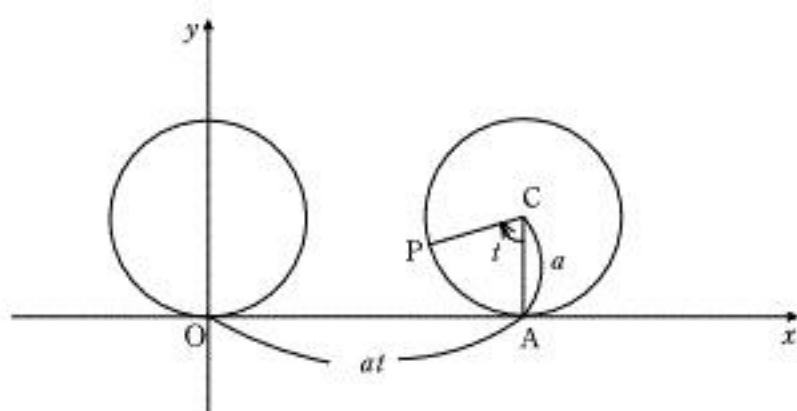
.....(答)

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{81}{32a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{81}{32a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{27}{8a} \quad \text{.....(答)}$$

[4]

(1)



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$$

$$= (at, 0) + (0, a) + \left(a \cos \left(\frac{3\pi}{2} - t \right), a \sin \left(\frac{3\pi}{2} - t \right) \right)$$

$$= (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$$

$$\therefore P(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$$

.....(答)

(2) $P(x, y)$ とおくと (1) より

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

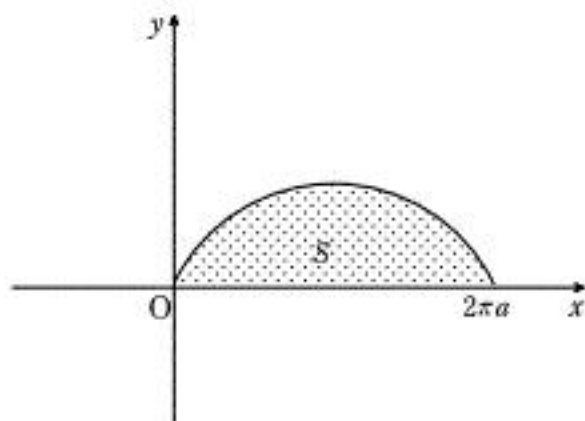
右図の打点部分の面積を S とすると、

$$S = \int_0^{2\pi} y dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt$$

$$= a^2 \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$

.....(答)

(3) 求める曲線の長さを s とすると

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 8a$$

.....(答)

[5]

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

(1) $Q(X, Y)$ が $9X=2Y^2$ の全体を動くことにより $X=ax+by, Y=cx+dy$ を代入して

$$9(ax+by)=2(cx+dy)^2$$

$$\iff 9ax+9by=2(c^2x^2+2cdxy+d^2y^2)$$

 $y=x^2$ を代入して整理すると,

$$2d^2x^4+4cdx^3+(2c^2-9b)x^2-9ax=0$$

上式が任意の実数 x で成り立つことから

$$d=0, a=0, 2c^2-9b=0, b=\frac{2c^2}{9} \quad (c \neq 0)$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2c^2}{9} \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\left(\text{このとき, } \begin{cases} X = \frac{2c^2}{9}y = \frac{2c^2}{9}x^2 \\ Y = cx \quad (c \neq 0) \end{cases} \text{で } 9X=2Y^2 \text{ をみたす} \right)$$

(2) $X=ax+bx^2, Y=cx+dx^2$ が円 $X^2+(Y-1)^2=1$ 上にあることから代入して, $(ax+bx^2)^2+(cx+dx^2-1)^2=1$

$$\iff a^2x^2+2abx^3+b^2x^4+c^2x^2+2cdx^3+d^2x^4-2cx-2dx^2=0$$

$$\iff (b^2+d^2)x^4+2(ab+cd)x^3+(a^2+c^2-2d)x^2-2cx=0$$

任意の実数 x で上式が成り立つことから,

$$c=0, a^2-2d=0, ab=0, b^2+d^2=0$$

を満たす a, b, c, d は $(a, b, c, d)=(0, 0, 0, 0)$ で

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(このとき, $y=x^2$ 上の任意の点は円上の原点のみに移る)(3) A により原点は原点に移ることから, 直線 L は原点を通る直線で,(i) $x=0$ のとき, Q の座標は, $b \neq 0$ または $d \neq 0$ とすると,

$$\begin{cases} at+bt^2 = b\left(t+\frac{a}{2b}\right)^2 - \frac{a^2}{4b} \\ ct+dt^2 = d\left(t+\frac{c}{2d}\right)^2 - \frac{c^2}{4d} \end{cases}$$

となり直線全体を動くことはないから, $b=0$ かつ, $d=0$

$$\begin{cases} X = ax+bx^2 = 0 \\ Y = cx+dx^2 \end{cases} \text{ が任意の実数 } x \text{ で成り立つためには}$$

$$\left. \begin{aligned} a &= b = 0 \\ \text{ただし } c^2 + d^2 &\neq 0 \end{aligned} \right\}$$

 Y は任意実数より $d=0$ (ii) $y=mx$ のとき,

$$Y=mX \iff cx+dx^2=m(ax+bx^2)$$

$$\iff (mb-d)x^2+(ma-c)x=0$$

任意の実数 x で成り立つ条件は,

$$\begin{cases} mb=d \\ ma=c \end{cases} \text{ から } mab=\underline{ad=bc}$$

$$a^2+b^2 \neq 0 \quad (a=0 \text{ かつ } b=0 \text{ であると } A=O \text{ で不適})$$

$$\text{このとき, } \begin{cases} X = ax+by \\ Y = cx+dy \end{cases} \iff \begin{cases} cX = acx+bcy \\ aY = acx+ady \end{cases}$$

$$\therefore aY=cX$$

$$\therefore y = \frac{c}{a}x \quad (a \neq 0), (y: \text{任意の実数より } d=0, c \neq 0)$$

以上より,

$$\left. \begin{aligned} &\underline{(a, b)=(0, 0), c \neq 0, d=0 \text{ のとき}} && L: x=0 \\ &\underline{b=0 \text{ かつ, } d=0, (a, c) \neq (0, 0) \text{ のとき}} && \\ &&& L: y = \frac{c}{a}x \quad (a \neq 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots(\text{答})$$