

[1]

(1) Pを通り $y=x$ と垂直に交わる直線は、

$$\begin{cases} \text{傾き } -1 \\ \text{通る点 } P(t, t^2) \end{cases} \text{ より,}$$

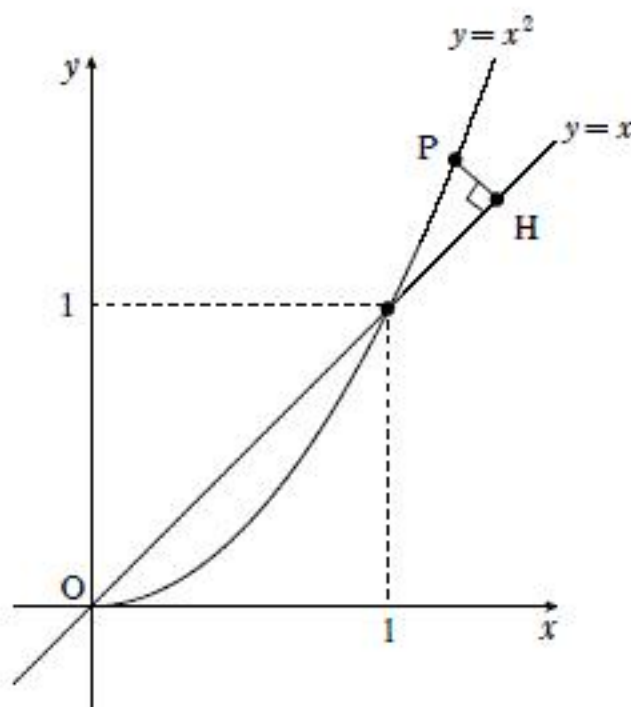
$$y - t^2 = -(x - t)$$

$$\therefore y = -x + t + t^2$$

これと $y=x$ を連立して解くと、

$$x = y = \frac{t + t^2}{2}$$

よって、
$$H\left(\frac{t + t^2}{2}, \frac{t + t^2}{2}\right) \dots\dots(\text{答})$$



(2) PHの傾きが -1 , $\angle PHR = 90^\circ$ より、

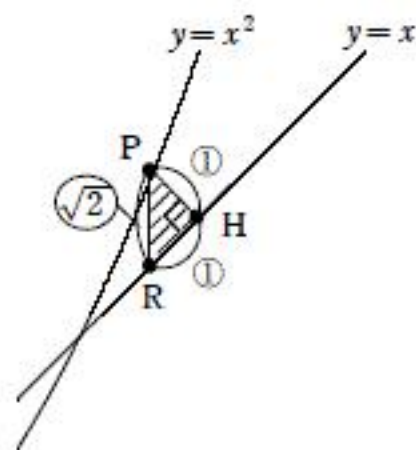
$\triangle PRH$ は辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形.

P(t, t^2)よりR(t, t)したがって、

$$PR = t^2 - t, PH = RH = \frac{t^2 - t}{\sqrt{2}}$$

よって、

$$\triangle PRH = \frac{t^2 - t}{\sqrt{2}} \times \frac{t^2 - t}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{(t^2 - t)^2}{4} \dots\dots(\text{答})$$



$$\begin{aligned} (3) \quad S_1 &= \int_1^t (x^2 - x) dx + \triangle PRH = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^t + \frac{(t^2 - t)^2}{4} \\ &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{t^4 - 2t^3 + t^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{6} \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$(4) \quad S_2 = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6} (1 - 0)^3 = \frac{1}{6}$$

$S_1 = S_2$ のとき、

$$\frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{4} t^2 = 0$$

$t > 1$ より、両辺を t^2 で割って、

$$\frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{6} t - \frac{1}{4} = 0$$

$$3t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 9}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$t > 1$ より、

$$t = \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \dots\dots(\text{答})$$

[2]

(1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき,

$$a_2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot (-\sqrt{3})}{1 - (-\sqrt{3})^2} = \frac{2 \cdot (-\sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} = a_2$$

よって、 a_n ($n \geq 2$) は、 $\sqrt{3}$ 、 $-\sqrt{3}$ の繰り返しとわかる。

したがって、 $a_{10} = \sqrt{3}$ 、 $a_{11} = -\sqrt{3}$ (答)

$$\begin{aligned} (2) \quad \tan \frac{\pi}{12} &= \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = \underline{2 - \sqrt{3}} \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$

(3) $a_1 = \tan \frac{\pi}{7}$ のとき,

$$a_2 = \frac{2 \cdot \tan \frac{\pi}{7}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{7}} = \tan \left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \right) = \tan \frac{2}{7} \pi \neq a_1$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot \tan \frac{2}{7} \pi}{1 - \tan^2 \frac{2}{7} \pi} = \tan \left(\frac{2}{7} \pi + \frac{2}{7} \pi \right) = \tan \frac{4}{7} \pi \neq a_1$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot \tan \frac{4}{7} \pi}{1 - \tan^2 \frac{4}{7} \pi} = \tan \left(\frac{4}{7} \pi + \frac{4}{7} \pi \right) = \tan \frac{8}{7} \pi = \tan \frac{\pi}{7} = a_1$$

$\therefore$ $\min. k = 4$ (答)

[3]

(1) $4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ を変形して、 $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$

BC の中点を M とすると、 $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$ であるから、 $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OM}$

したがって、A は OM の中点となる。

(2) $|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}|^2$
 $= 2|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

ここで、(1) より、 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AM}$ であり、
 $\angle BAC = 90^\circ$ であることから、 $\triangle BAC$ の
 外心が M となるので、

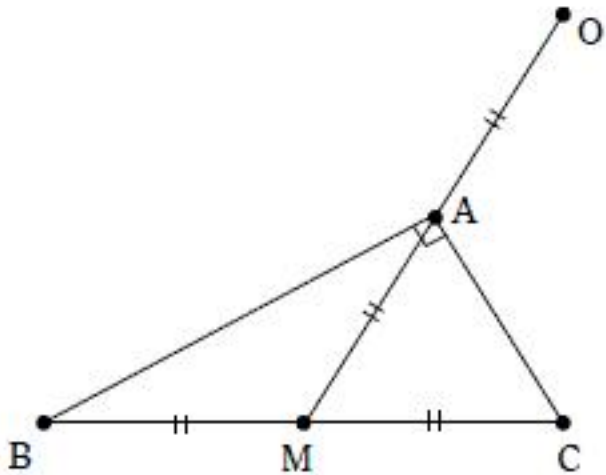
$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}| = \frac{1}{2}BC (=1)$$

また、三平方の定理より、

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 (=2^2)$$

よって、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 &= 2|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot 2\overrightarrow{AM} \\ &= 6|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 \\ &= 6 \cdot 1^2 + 2^2 \\ &= 10 \quad \square \end{aligned}$$



(3) $4|\overrightarrow{PA}|^2 - |\overrightarrow{PB}|^2 - |\overrightarrow{PC}|^2 = -4$ のとき、

$$4|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}|^2 = -4$$

$$4|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 + 2|\overrightarrow{OP}|^2 - 8\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = -4$$

$$4|\overrightarrow{OA}|^2 - (|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2) + 2|\overrightarrow{OP}|^2 - 8\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OP} = -4$$

ここで、(2) より、 $|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 = 10$

また、 $4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ より、 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OA}$

よって、

$$4|\overrightarrow{OA}|^2 - 10 + 2|\overrightarrow{OP}|^2 - 8\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + 2 \times 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = -4$$

$$4|\overrightarrow{OA}|^2 - 10 + 2|\overrightarrow{OP}|^2 = -4$$

$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AM}| = 1$ より、

$$4 \cdot 1^2 - 10 + 2|\overrightarrow{OP}|^2 = -4$$

$$2|\overrightarrow{OP}|^2 = 2$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = 1$$

$$|\overrightarrow{OP}| = 1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

[4] 球の取り出し方は全部で $({}_4C_2)^2$ 通り.

(1) カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶには, 1 回目と 2 回目と同じ取り出し方であればよい.

1 回目は ${}_4C_2$ 通り, 2 回目は 1 通りあるので, 求める確率は

$$\frac{{}_4C_2 \times 1}{({}_4C_2)^2} = \frac{1}{{}_4C_2} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶには, 1 回目と 2 回目で, 1 と 4, 2 と 3 を取り出せばよい. よって, 求める確率は

$$\frac{2}{{({}_4C_2)}^2} = \underline{\underline{\frac{1}{18}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) 左端のカードが, 1 になるには,

(i) 1, 2 回目とも取り出す球に 1 が含まれない.

(ii) 1, 2 回目とも同じ取り出し方で 1 を含む.

のどちらか.

(i) は $({}_3C_2)^2$ 通り

(ii) は ${}_3C_1$ 通り

よって, 求める確率は

$$\frac{({}_3C_2)^2 + {}_3C_1}{{({}_4C_2)}^2} = \frac{3^2 + 3}{6^2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(4) 左端に 2, 3, 4 のくる確率は等しいので, $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

左端の数字	1	2	3	4
確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

よって, 左端の数字の期待値は

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} = 1 \cdot \frac{1}{3} + (2 + 3 + 4) \cdot \frac{2}{9} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}} \quad \dots\dots(\text{答})$$