

[1]

(1) 直線 PH の方程式は

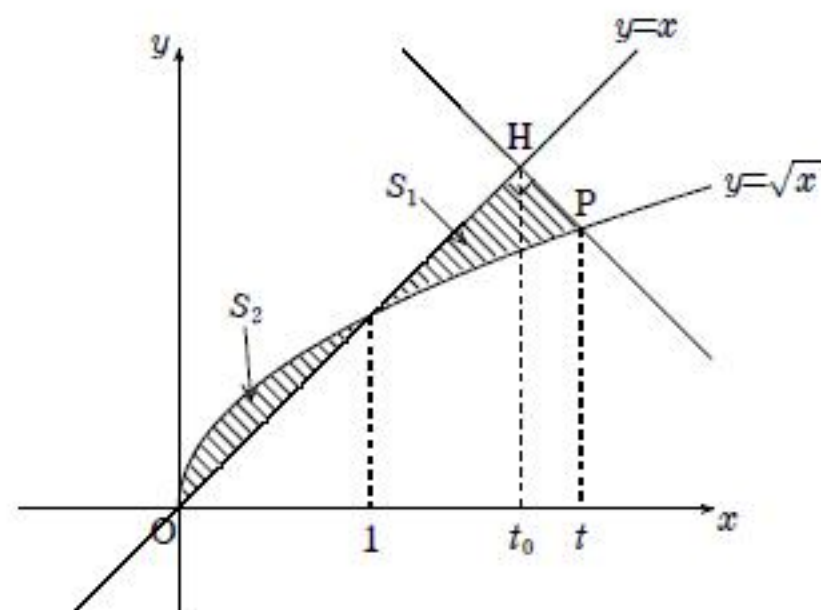
$$y = -(x-t) + \sqrt{t}$$

よって、連立方程式

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + t + \sqrt{t} \end{cases}$$

を解くことにより、H の座標は

$$H\left(\frac{t+\sqrt{t}}{2}, \frac{t+\sqrt{t}}{2}\right)$$



(2) $t_0 = \frac{t+\sqrt{t}}{2}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(t_0+1)(t_0-1) + \frac{1}{2}(t_0+\sqrt{t})(t-t_0) - \int_1^t \sqrt{x} dx \\ &= \frac{1}{2}\{(t-\sqrt{t})t_0 + t\sqrt{t} - 1\} - \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^t \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{t^2-t}{2} + t\sqrt{t} - 1\right\} - \frac{2}{3}(t\sqrt{t} - 1) \\ &= \frac{3t^2 - 2t\sqrt{t} - 3t + 2}{12} \end{aligned}$$

$$(3) \quad S_2 = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

であるから、 $S_1 = S_2$ に代入すると、

$$\frac{3t^2 - 2t\sqrt{t} - 3t + 2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$3t^2 - 2t\sqrt{t} - 3t = 0$$

$t \neq 0$ であるから、

$$3t - 2\sqrt{t} - 3 = 0$$

$$\sqrt{t} = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \quad (\because t > 1)$$

$$\therefore t = \left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^2 = \frac{11+2\sqrt{10}}{9}$$

[2]

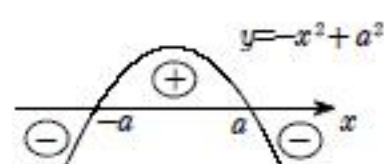
$$(1) \quad f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$$

$$= (-x^2 + a^2)e^{-x}$$

$a > 0$ より, $f(x)$ の増減表は下のようになる.

x	...	$-a$	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$(-2a+2)e^a$	$\nearrow$	$(2a+2)e^{-a}$	$\searrow$



これより,

$$\begin{cases} \text{極大値は } f(a) = (2a+2)e^{-a} \\ \text{極小値は } f(-a) = (-2a+2)e^a \end{cases}$$

$$(2) \quad g(x) = x^3 e^{-x}$$

とおく.

$$g'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}$$

$$= (3-x)x^2 e^{-x} \leq 0 \quad (\because x \geq 3)$$

よって, $g(x)$ は $x \geq 3$ において単調減少関数であるから, $x \geq 3$ のとき

$$g(x) \leq g(3)$$

$$\therefore x^3 e^{-x} \leq 27e^{-3}$$

また, これより, $x \geq 3$ のとき,

$$0 < x^2 e^{-x} \leq \frac{27e^{-3}}{x}$$

したがって,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$$

(3) (2) より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2-a^2}{x^2} \right) x^2 e^{-x} = 0$$

よって, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ に注意すると, $y = f(x)$ の

グラフは右図のようになる (x 軸との交点を考えると3つの場合がある).

さて, $y = x^2 + 2x + 2$ と $y = ke^x + a^2$ より, y を消去すると,

$$x^2 + 2x + 2 = ke^x + a^2$$

$$x^2 + 2x + 2 - a^2 = ke^x$$

$$\therefore (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x} = k$$

よって, 交点の個数は方程式 $f(x) = k$ の実数解の個数に帰着される.

したがって, グラフを利用することにより,

求める答は

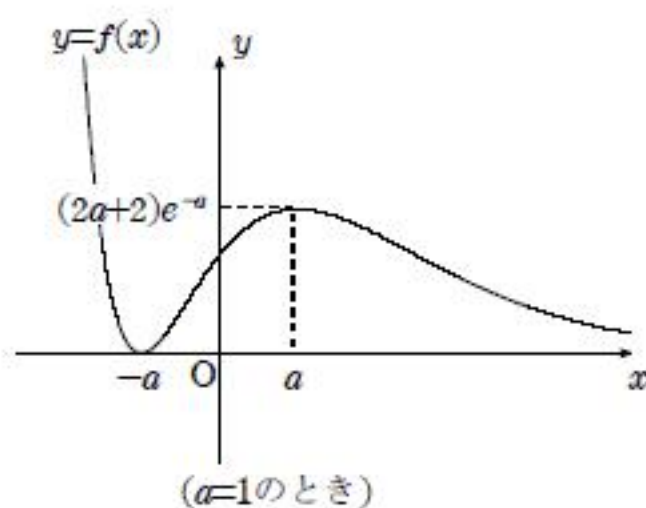
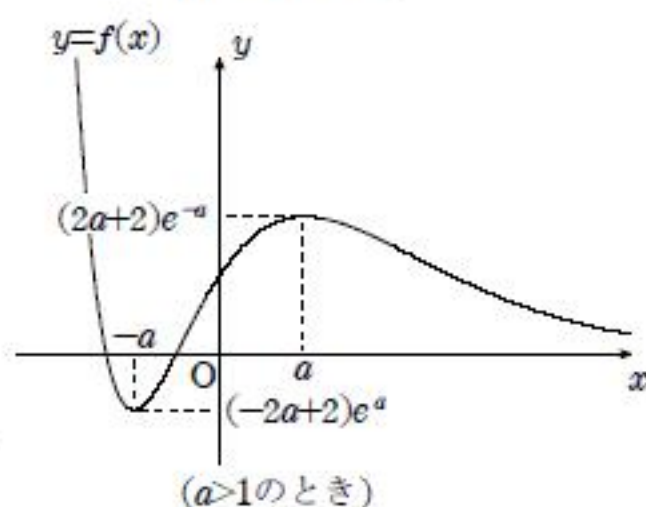
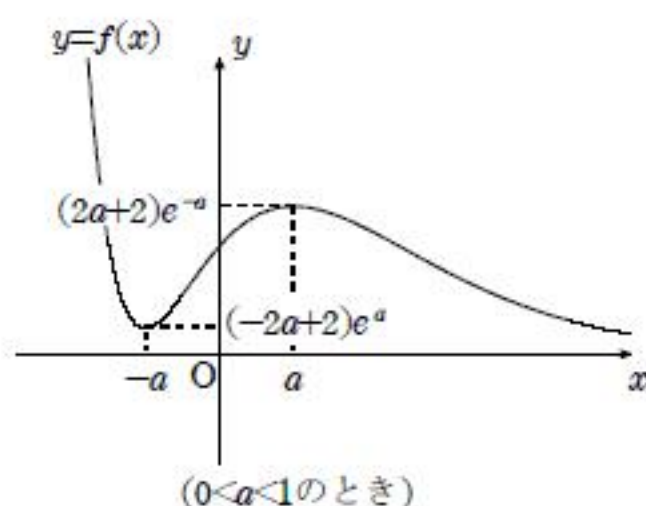
$$\begin{cases} 0 < a \leq 1 \text{ のとき } (-2a+2)e^a < k < (2a+2)e^{-a} \\ a > 1 \text{ のとき } 0 < k < (2a+2)e^{-a} \end{cases}$$

(コメント)

$a=1$ のときは, 上記どちらの場合に含めてもよい. 場合分けをせずに書くと

$$\max\{0, (-2a+2)e^a\} < k < (2a+2)e^{-a}$$

となる.



[3]

$$(1) \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より, } a_2 = \sqrt{3}$$

一般に, $a_k = \sqrt{3}$ ならば $a_{k+1} = -\sqrt{3}$, $a_k = -\sqrt{3}$ ならば $a_{k+1} = \sqrt{3}$ であるから, 求める答は

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, a_n = \sqrt{3} \text{ (} n \text{ が偶数のとき), } a_n = -\sqrt{3} \text{ (} n \text{ が 3 以上の奇数のとき)}$$

$$(2) \quad \tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

(3) まず, $a_1 = \tan \theta$ とおくと, $a_n = \tan 2^{n-1} \theta$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを数学的帰納法で示す.

(I) $n = 1$ のときは自明.

(II) $a_k = \tan 2^{k-1} \theta$ と仮定する. 2 倍角公式より

$$a_{k+1} = \frac{2a_k}{1 - a_k^2} = \frac{2 \tan 2^{k-1} \theta}{1 - \tan^2 2^{k-1} \theta} = \tan 2^k \theta$$

(I), (II) より, すべての自然数 n に対し, $a_n = \tan 2^{n-1} \theta$ が示された.

これより,

$$a_1 = \tan \frac{\pi}{20} \text{ のとき, } a_n = \tan \frac{2^{n-3} \pi}{5}$$

したがって,

$$a_3 = \tan \frac{\pi}{5}, a_4 = \tan \frac{2\pi}{5}, a_5 = \tan \frac{4\pi}{5}, a_6 = \tan \frac{8\pi}{5}$$

であるから, $k = 1, 2, 3$ のとき, $a_{n+k} = a_n$ ($n \geq 3$) は不成立である.

また, $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$ を利用すると, $n \geq 3$ のとき,

$$a_{n+4} = \tan \frac{2^{n+1} \pi}{5} = \tan 2^4 \cdot \frac{2^{n-3} \pi}{5} = \tan \left(3 \cdot 2^{n-3} \pi + \frac{2^{n-3} \pi}{5} \right) = \tan \frac{2^{n-3} \pi}{5} = a_n$$

したがって, $a_{n+k} = a_n$ ($n \geq 3$) をみたす最小の自然数 k は 4

[4]

(1) $D(a, b, c)$, 球面の半径を r とおくと,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = r^2 & \dots\dots ① \\ a^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = r^2 & \dots\dots ② \\ (a-1)^2 + b^2 + (c-3)^2 = r^2 & \dots\dots ③ \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = r^2 & \dots\dots ④ \end{cases}$$

①-②, ③-④ より

$$\begin{cases} 4b + 6c - 13 = 0 \\ 4b - 6c + 5 = 0 \end{cases}$$

これより, $b = 1, c = \frac{3}{2}$

代入して, $a = \frac{1}{2}, r = \frac{\sqrt{14}}{2}$

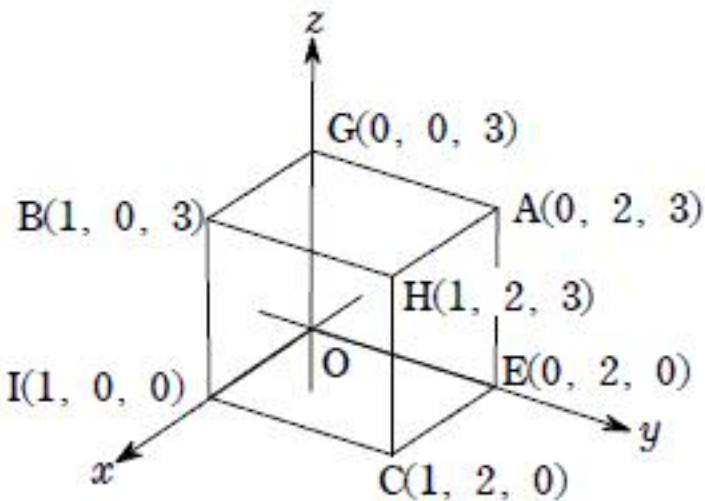
$$\therefore D\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$$

(別解)

右図の直方体 $OICE-GBHA$ において,

線分 OH の中点 $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ は 8 個の頂点 O, I, C, E, G, B, H, A から等距離であるから, 求める球の中心である.

$$\therefore D\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$$



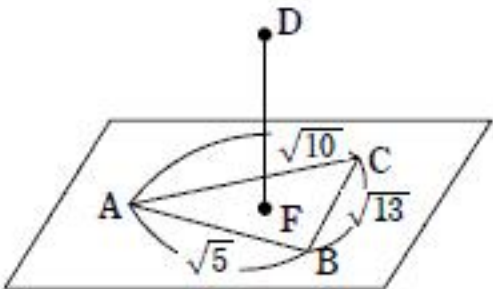
(2) $AB = \sqrt{5}, BC = \sqrt{13}, CA = \sqrt{10}$ であり,

$$DA = DB = DC = r = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

であるから, F は $\triangle ABC$ の外心である. 余弦定理より,

$$\cos \angle CAB = \frac{5 + 10 - 13}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin \angle CAB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAB} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$



よって, 正弦定理より

$$2AF = \frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{5\sqrt{26}}{7}$$

$$\therefore AF = \frac{5\sqrt{26}}{14}$$

したがって,

$$\begin{aligned} DF &= \sqrt{DA^2 - AF^2} \\ &= \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{325}{98}} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

(別解)

$\overline{AB} = (1, -2, 0), \overline{AC} = (1, 0, -3)$ の両方に垂直なベクトルのひとつを $\vec{n}$ とすると,
 $\vec{n} = (6, 3, 2)$

これより

$$DF = \frac{1}{|\vec{n}|} |\vec{n} \cdot \overline{AD}| = \frac{1}{7} \cdot 3 = \frac{3}{7}$$

(3) 求める体積を V とする.

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle CAB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times DF \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(部分的別解)

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 10 - 1^2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

[5]

この操作を1回行うとき、すべての球の取り出し方は

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$$

の6($= {}_4C_2$)通りある。

(1) $n=2$ のとき、すべての取り出し方は、 $6^2=36$ 通り。このうち、カードが左から順に1, 2, 3, 4となるのは、1回目と2回目が同じ取り出し方をする場合なので6通り。

$$\therefore \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(2) $\begin{cases} 1 \text{ 回目}(1, 4), 2 \text{ 回目}(2, 3) \\ 1 \text{ 回目}(2, 3), 2 \text{ 回目}(1, 4) \end{cases}$ のどちらかの場合なので $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

(3) n 回後に左端のカードが1である確率を a_n とおく。

$n+1$ 回後に左端のカードが1であるためには次の2つの場合がある。

- ① n 回後に1のカードが一番左にあり、 $n+1$ 回目に $(2, 3), (2, 4), (3, 4)$ のいずれかの球が取り出される
- ② n 回後に k のカードが一番左にあり ($k=2, 3, 4$)、 $n+1$ 回目に $(1, k)$ の球が取り出される

これより、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}(1-a_n) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}$$

$$a_0=1 \text{ であるから, } a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}$$

よって、求める確率は $\frac{1}{3}$

(4) (2) より、 $a_3 = \frac{5}{18}$

また、2, 3, 4に関する対称性より、

$$\begin{aligned} (3 \text{ 回後に左端のカードが } 2 \text{ である確率}) &= (3 \text{ 回後に左端のカードが } 3 \text{ である確率}) \\ &= (3 \text{ 回後に左端のカードが } 4 \text{ である確率}) \\ &= \frac{1}{3}(1-a_3) = \frac{13}{54} \end{aligned}$$

$n=3$ のときの左端のカードの数字	1	2	3	4
確率	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{54}$	$\frac{13}{54}$	$\frac{13}{54}$

これより、求める期待値は

$$1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{13}{54} + 3 \cdot \frac{13}{54} + 4 \cdot \frac{13}{54} = \frac{22}{9}$$

(部分的別解)

n 回目に左端のカードが2, 3, 4である確率をそれぞれ b_n, c_n, d_n とおくと、(3)と同様に

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6} \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{6} \\ d_{n+1} = \frac{1}{3}d_n + \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$b_0=c_0=d_0=0 \text{ であるから, これより, } b_3=c_3=d_3=\frac{13}{54}$$