

[1]

$$(1) \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4, \quad |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6}$$

$$\therefore \cos \angle B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-4}{\sqrt{30}} < 0 \text{ より, } \angle B > \frac{\pi}{2} \quad \square$$

(2)

$$\overrightarrow{BH} = k \overrightarrow{BC} \text{ とおく.}$$

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BH} \text{ より, } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$$

$$(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BH} = 0$$

$$(k \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \cdot k \overrightarrow{BC} = 0$$

$$k^2 |\overrightarrow{BC}|^2 - k \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$6k^2 + 4k = 0$$

$$k = 0, -\frac{2}{3}$$

$$k \neq 0 \text{ より, } k = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{BH} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad \therefore H \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

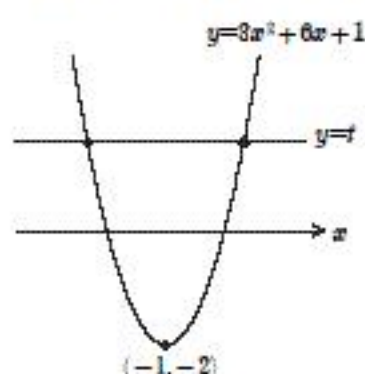
$$\begin{aligned} (3) \quad \triangle OAH &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OH}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 \cdot \frac{36}{9} - \left(\frac{4}{3} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

.....(答)

$$(1) \quad f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$$

$3x^2 + 6x + 1 = t$ の解は, $\begin{cases} y = 3x^2 + 6x + 1 \\ y = t \end{cases}$ の共有点の x 座標でもある.

ここで, $y = 3x^2 + 6x + 1 = 3(x+1)^2 - 2$ より, グラフは図のようになる.



よって, $t \geq 0$ のとき, $y = 3x^2 + 6x + 1$ と $y = t$ は異なる 2 点で交わる. これは, $3x^2 + 6x + 1 = t$ が異なる 2 実数解をもつことになるので, 傾きが t である接点および接線がそれぞれ 2 つある. $\square$

$$(2) \quad 3x^2 + 6x + 1 = t, \text{ すなわち, } 3x^2 + 6x + 1 - t = 0 \text{ の解を } p, q \text{ とする.}$$

解と係数の関係より, $p+q = -2, pq = \frac{1-t}{3}$

また,

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1 = \frac{1}{3}(x+1)(3x^2 + 6x + 1 - t) + \frac{t-4}{3}x + \frac{t-4}{3}$$

より,

$$f(p) = \frac{t-4}{3}p + \frac{t-4}{3}, f(q) = \frac{t-4}{3}q + \frac{t-4}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \frac{f(p)+f(q)}{2} = \frac{\frac{t-4}{3}(p+q) + \frac{t-4}{3} \times 2}{2} = \frac{\frac{t-4}{3} \times (-2) + \frac{t-4}{3} \times 2}{2} = 0 \end{cases}$$

よって, $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ は $A(-1, 0)$ に関して対称.

$$\begin{aligned} (3) \quad PQ &= \sqrt{(q-p)^2 + \{f(q) - f(p)\}^2} = \sqrt{(q-p)^2 + \left\{\frac{t-4}{3}(q-p)\right\}^2} \\ &= \sqrt{\left[1 + \frac{(t-4)^2}{9}\right](q-p)^2} = \sqrt{\frac{t^2 - 8t + 25}{9} \{(p+q)^2 - 4pq\}} \\ &= \sqrt{\frac{t^2 - 8t + 25}{9} \{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1-t}{3}\}} = \sqrt{\frac{t^2 - 8t + 25}{9} \cdot \frac{4t+8}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{27}(t^3 - 6t^2 + 9t + 50)} \end{aligned}$$

ここで, $g(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 50$ とおくと,

$$g'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$$

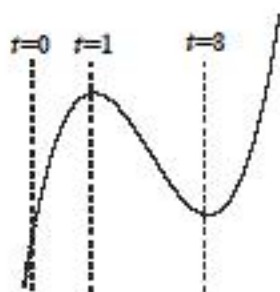
$$g(0) = g(3) = 50$$

よって, $t \geq 0$ のとき, PQ は

最小値

$$\sqrt{\frac{4}{27} \times 50} = \frac{10\sqrt{6}}{9} \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる.



t	0	...	1	...	3	...
$g'(t)$		+	0	-	0	+
$g(t)$	50	↗		↘	50	↗

また, $t=0$ のとき, $3x^2 + 6x + 1 = 0$ を解いて,

$$p = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3}, q = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$t=3$ のとき, $3x^2 + 6x - 2 = 0$ を解いて,

$$p = \frac{-3 - \sqrt{15}}{3}, q = \frac{-3 + \sqrt{15}}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

セットAを x セット買ったとき、残りの $100-7x$ 枚は、セットBを購入することで充当することになる。

- (1) $x=3m$ ($m=0, 1, 2, \dots$) のとき、

$$\frac{1}{3}(100-7x)=33+\frac{1}{3}-7m$$

$x=3m+1$ ($m=0, 1, 2, \dots$) のとき、

$$\frac{1}{3}(100-7x)=31-7m$$

$x=3m+2$ ($m=0, 1, 2, \dots$) のとき、

$$\frac{1}{3}(100-7x)=29-\frac{1}{3}-7m$$

この中で整数になるのは、 $x=3m+1$ のときである。□

- (2) 乗車券が余らないのは、 $\frac{1}{3}(100-7x)$ が整数となるとき、すなわち、 $x=3m+1$ ($m=0, 1, 2, \dots$) のときである。

このとき、Aは $x=3m+1$ セット、Bは $\frac{1}{3}(100-7x)=31-7m$ セット購入している。

m	0	1	2	3	4
A	1	4	7	10	13
B	31	24	17	10	3

$\therefore (A, B) = (1, 31), (4, 24), (7, 17), (10, 10), (13, 3) \dots$ (答)

- (3) 乗車券が1枚余るとき、101枚購入すると考えて、Aを x セット購入するとすると、Bは $\frac{1}{3}(101-7x)$ セット購入することになる。

$$\frac{1}{3}(101-7x)=33-2x+\frac{2-x}{3}$$

より、 $x=3m+2$ ($m=0, 1, 2, \dots$) とおけ、このとき、Aは $3m+2$ セット、Bは $\frac{1}{3}(101-7x)=29-7m$ セット購入している。

m	0	1	2	3	4
A	2	5	8	11	14
B	29	22	15	8	1

乗車券が2枚余るとき、102枚購入すると考えて、Aを x セット購入するとすると、Bは $\frac{1}{3}(102-7x)$ セット購入することになる。

$$\frac{1}{3}(102-7x)=34-2x-\frac{x}{3}$$

より、 $x=3m$ ($m=0, 1, 2, \dots$) とおけ、このとき、Aは $3m$ セット、Bは $34-7m$ セット購入している。

m	0	1	2	3	4
A	0	3	6	9	12
B	34	27	20	13	6

Aを3セット多くし、Bを7セット少なくすると、

$$480 \times 3 - 220 \times 7 = -100$$

より、100円安くなる。よって、それぞれAが最大であるもの

$$(A, B) = (13, 3), (14, 1), (12, 6)$$

の全額を調べればよい。

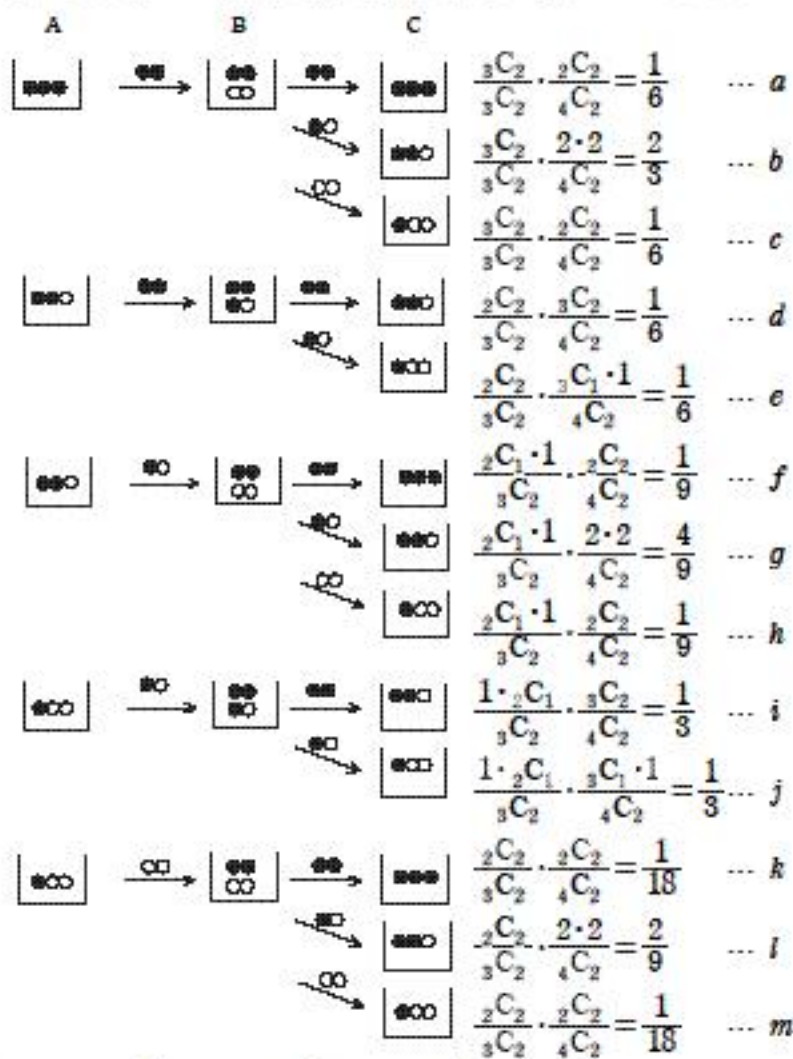
$$13 \times 480 + 3 \times 220 = 6900, 14 \times 480 + 1 \times 220 = 6940, 12 \times 480 + 6 \times 220 = 7080$$

より、

Aを13セット、Bを3セット購入したとき、最低金額6900円となる。

.....(答)

次のような玉の移動に対する確率をそれぞれ $a \sim m$ とおく.



$$(1) \quad p_1 = c = \frac{1}{6}, p_2 = b = \frac{2}{3}, p_3 = a = \frac{1}{6} \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad q_1 = a \cdot c + b(e + h) + c(j + m) = \frac{5}{18}$$

$$q_2 = a \cdot b + b(d + g) + c(i + l) = \frac{11}{18} \quad \dots (\text{答})$$

$$q_3 = a \cdot a + b \cdot f + c \cdot k = \frac{1}{9}$$

$$(3) \quad q_3 \cdot a + q_2 \cdot f + q_1 \cdot k = \frac{11}{108} \quad \dots (\text{答})$$