

[1]

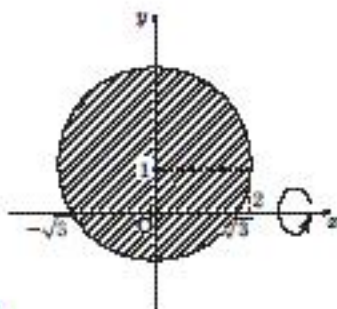
$$x^2 + (y-1)^2 = 4 \text{ より,}$$

$$y-1 = \pm\sqrt{4-x^2}$$

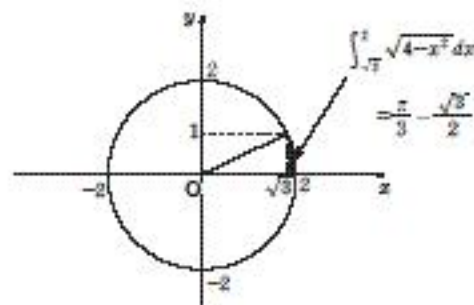
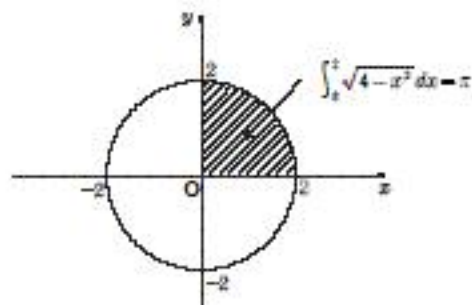
$$\therefore y = 1 \pm \sqrt{4-x^2}$$

y 軸対称であることに注意すると, 求める体積を V とするとき,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= \int_0^2 \pi(1+\sqrt{4-x^2})^2 dx - \int_{\sqrt{3}}^2 \pi(1-\sqrt{4-x^2})^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (5-x^2) dx + 2\pi \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx + 2\pi \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \pi \left[5x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} + 2\pi \times \pi + 2\pi \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{3}\pi + \frac{8}{3}\pi^2 \\ \therefore V &= 6\sqrt{3}\pi + \frac{16}{3}\pi^2 \end{aligned}$$



(注) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx, \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ は下図の面積を表す.



(2)
(1)

$$A \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & -11 \end{pmatrix} \text{より, } A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & -11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -9 & -7 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \text{より, } B = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$$

また,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $X = AB$ とおくと,

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}$$

ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$X^2 + X + E = O$$

$$(X - E)(X^2 + X + E) = O$$

$$\therefore X^3 = E$$

(3) $(AB)^3 = E$ より,

$$A, AB, ABA, ABAB, \dots$$

の中には, $A, AB, ABA, ABAB, ABABA, ABABAB \dots$ ①以外のものは出現しない.

また, $ABABAB = E$ より, この式の両辺に右から $B, A, B, A, \dots$ の順に次々と掛けていくと, $A^2 = B^2 = E$ であるから,

$$ABABAB = E$$

$$ABABA = B$$

$$ABAB = BA$$

$$ABA = BAB$$

$$AB = BABA$$

$$A = BABAB$$

$$E = BABABA$$

よって, $B, BA, BAB, BABA, \dots$ の中には, ①の6個以外のものは出現しない. したがって, ①の6個について調べれば十分である. 計算すると,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}, AB = X = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}, ABA = \begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$ABAB = X^2 = -(X + E) = \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}, ABABA = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix},$$

$$ABABAB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから, これらの中に重複はない.

したがって, 求める答は,

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$(1) \quad a(x^2 + |x+1| + n - 1) = \sqrt{n}(x+1) \quad \dots\dots ①$$

$a=0$ のとき, ①は明らかに実数解 $x=-1$ をもつ.

$a \neq 0$ のとき, ①は,

$$\frac{x^2 + |x+1| + n - 1}{x+1} = \frac{\sqrt{n}}{a} \quad \dots\dots ②$$

この式の左辺を $f(x)$ とおく.

$x > -1$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2 + x + n}{x+1}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2 + x + n)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - n}{(x+1)^2}$$

よって, $f(x)$ の増減は下のようになる.

x	(-1)	$\dots$	$-1 + \sqrt{n}$	$\dots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$(-\infty) \searrow$	$2\sqrt{n} - 1$	$\nearrow (+\infty)$

一方, $x < -1$ のとき,

$$f(x) = \frac{x^2 - x + n - 2}{x+1}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x + n - 2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - n}{(x+1)^2}$$

よって, $f(x)$ の増減は下のようになる.

x	$\dots$	$-1 - \sqrt{n}$	$\dots$	(-1)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty) \nearrow$	$-2\sqrt{n} - 3$	$\searrow (-\infty)$	

これより, $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる.

よって, 方程式②が実数解をもつ条件は,

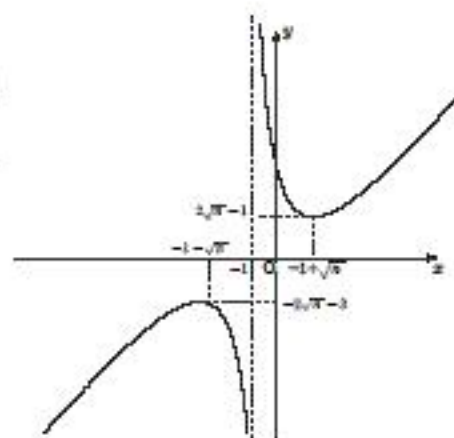
$$\begin{cases} a > 0 \text{ のとき} & \frac{\sqrt{n}}{a} \geq 2\sqrt{n} - 1 \quad \dots\dots ③ \\ a < 0 \text{ のとき} & \frac{\sqrt{n}}{a} \leq -2\sqrt{n} - 3 \quad \dots\dots ④ \end{cases}$$

$$③ \text{ より, } 0 < a \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1}$$

$$④ \text{ より, } \frac{-\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 3} \leq a < 0$$

$a=0$ と合わせて求める答は,

$$\frac{-\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 3} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1} \quad \dots\dots ⑤$$



(2) ⑤がすべての自然数について成り立てばよい.

$$g(n) = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n} - 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \text{ とおくと, これは単調減少数列. 一方,}$$

$$h(n) = \frac{-\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + 3} = \frac{-1}{2 + \frac{3}{\sqrt{n}}} \text{ とおくと, これも単調減少数列. よって, ⑤がすべての自然数}$$

について成立するための条件は,

$$h(1) \leq a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$$

$$\therefore -\frac{1}{5} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

4)

(1) 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q$$

このとき,

$$\begin{cases} a_1 = (\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = q + p + 1 \\ a_2 = (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) = (\alpha\beta)^2 - \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 1 = q^2 - p^2 + 2q + 1 \\ a_3 = (\alpha^3 - 1)(\beta^3 - 1) = (\alpha\beta)^3 - \{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)\} + 1 = q^3 + p^3 - 3pq + 1 \end{cases}$$

よって, a_1, a_2, a_3 は整数である.

(2) 2つの場合がある.

(i) $|\alpha| > 1, |\beta| > 1$ のとき

この場合

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(\alpha^{n+1} - 1)(\beta^{n+1} - 1)}{(\alpha^n - 1)(\beta^n - 1)} \right| = \left| \frac{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha^n}\right)\left(\beta - \frac{1}{\beta^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta^n}\right)} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta^n} = 0 \text{ なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |\alpha\beta| = |q|$$

(ii) $0 \leq |\alpha| < 1, 0 \leq |\beta| < 1$ のときこの場合, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n = 0$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\alpha^{n+1} - 1)(\beta^{n+1} - 1)}{(\alpha^n - 1)(\beta^n - 1)} \right| = 1$$

いずれの場合も, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ は整数である.(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は整数ではない. したがって, (2)より,

$$(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ でなければならない.}$$

 α, β の対称性より, $|\alpha| \geq |\beta|$ としてよい. このとき, ①より, $|\alpha| > 1, 0 \leq |\beta| < 1$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\alpha - \frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^{n+1} - 1)}{\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right)(\beta^n - 1)} \right| = |\alpha|$$

 $\therefore \alpha = \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である. α は解であるから, 代入すると,

$$\begin{aligned} \left(\pm \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot p + q &= 0 \\ \left(\pm \frac{1}{2}p + q + \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{p}{2} \right) \sqrt{5} &= 0 \end{aligned}$$

 p, q は整数, $\sqrt{5}$ は無理数なので,

$$\pm \frac{1}{2}p + q + \frac{3}{2} = 0, \frac{1}{2} \pm \frac{p}{2} = 0 \quad (\text{以上, 複号同順})$$

したがって,

$$(p, q) = (1, -1), (-1, -1)$$

(コメント)

整数係数の方程式において, $a+b\sqrt{5}$ が解のとき, $a-b\sqrt{5}$ が解であることはよく知られている (a, b は有理数). それを用いると,

$$\alpha = \pm \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ のとき, } \beta = \pm \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{複号同順})$$

とわかり,

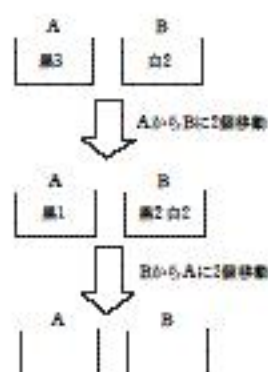
$$p = -(\alpha + \beta), q = \alpha\beta$$

より,

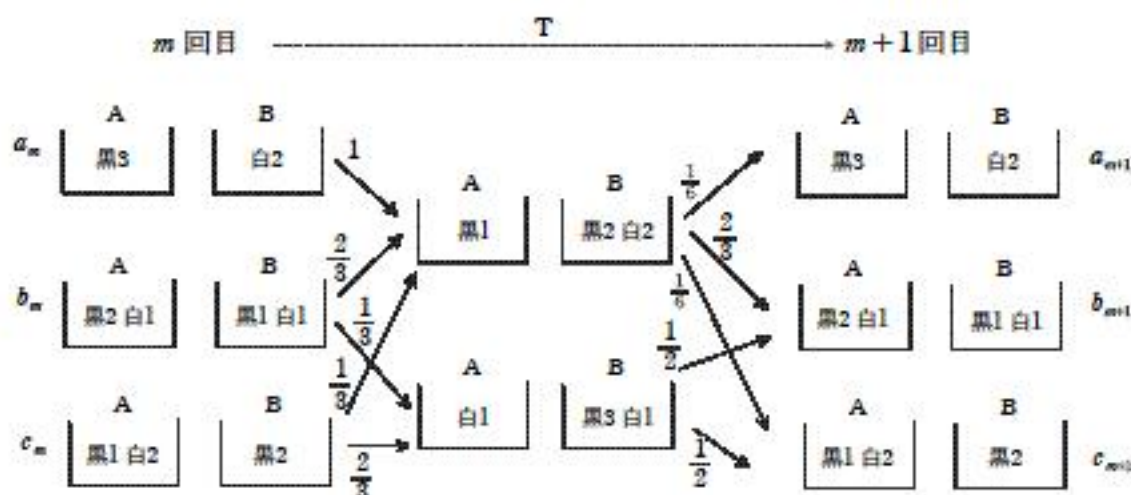
$$(p, q) = (1, -1), (-1, -1)$$

- (1) 箱Aから箱Bに2個移動すると、箱Aは黒玉1個、箱Bは黒玉2個、白玉2個の状態になる。
この状態において、箱Bから箱Aに2個移動させるので、

$$\begin{cases} p_3 = \frac{1}{4C_2} = \frac{1}{6} \\ p_2 = \frac{2 \cdot 2}{4C_2} = \frac{2}{3} \\ p_1 = \frac{1}{4C_2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$



- (2) Tを m 回行ったとき、箱Aに黒玉が3個、2個、1個入っている確率をそれぞれ a_m, b_m, c_m とおく。このとき、次のような推移図になる。



これより、

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \frac{1}{6}a_m + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}b_m + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}c_m \\ b_{m+1} &= \frac{2}{3}a_m + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)b_m + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)c_m \\ c_{m+1} &= \frac{1}{6}a_m + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)b_m + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)c_m \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{m+1} = \frac{1}{6}a_m + \frac{1}{9}b_m + \frac{1}{18}c_m \\ b_{m+1} = \frac{2}{3}a_m + \frac{11}{18}b_m + \frac{5}{9}c_m \\ c_{m+1} = \frac{1}{6}a_m + \frac{5}{18}b_m + \frac{7}{18}c_m \end{cases}$$

また、(1)より、

$$a_1 = \frac{1}{6}, b_1 = \frac{2}{3}, c_1 = \frac{1}{6}$$

したがって、

$$\begin{cases} q_3 = a_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{9}b_1 + \frac{1}{18}c_1 = \frac{1}{9} \\ q_2 = b_2 = \frac{2}{3}a_1 + \frac{11}{18}b_1 + \frac{5}{9}c_1 = \frac{11}{18} \\ q_1 = c_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{5}{18}b_1 + \frac{7}{18}c_1 = \frac{5}{18} \end{cases}$$

- (3) 求める答は、

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{6}a_2 + \frac{1}{9}b_2 + \frac{1}{18}c_2 \\ &= \frac{1}{54} + \frac{11}{162} + \frac{5}{324} \\ &= \frac{33}{324} \\ &= \frac{11}{108} \end{aligned}$$