

[1]

$$(1) \quad \overrightarrow{OD} = \frac{3}{4} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4} \overrightarrow{OP} \quad \dots (\text{答})$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OP} \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + (1-t) \overrightarrow{OA}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1-t) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}| \cos \angle AOP = |\overrightarrow{OA}| \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}|$$

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

$$(4) \quad \text{同様に, } \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}$$

また,  $\angle AOC = 90^\circ$  より,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

よって,

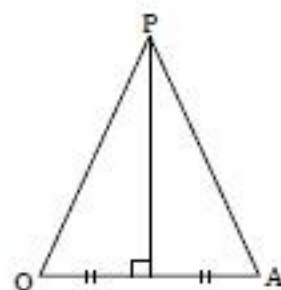
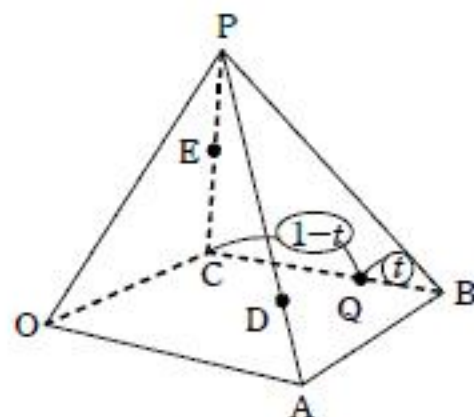
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OD} &= \{(1-t) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}\} \cdot \left\{ \frac{3}{4} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4} \overrightarrow{OP} \right\} \\ &= \frac{3}{4} (1-t) |\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{4} |\overrightarrow{OP}|^2 + \frac{3}{4} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{1}{4} (1-t) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &\quad - \frac{3}{4} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{1}{4} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{7}{8} t + \frac{5}{8} - \frac{1}{4} |\overrightarrow{OP}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OE} &= \{(1-t) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OP} \right\} \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OC}|^2 - \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP}|^2 + \frac{1}{2} (1-t) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2} (1-t) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &\quad + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{t}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP}|^2 \end{aligned}$$

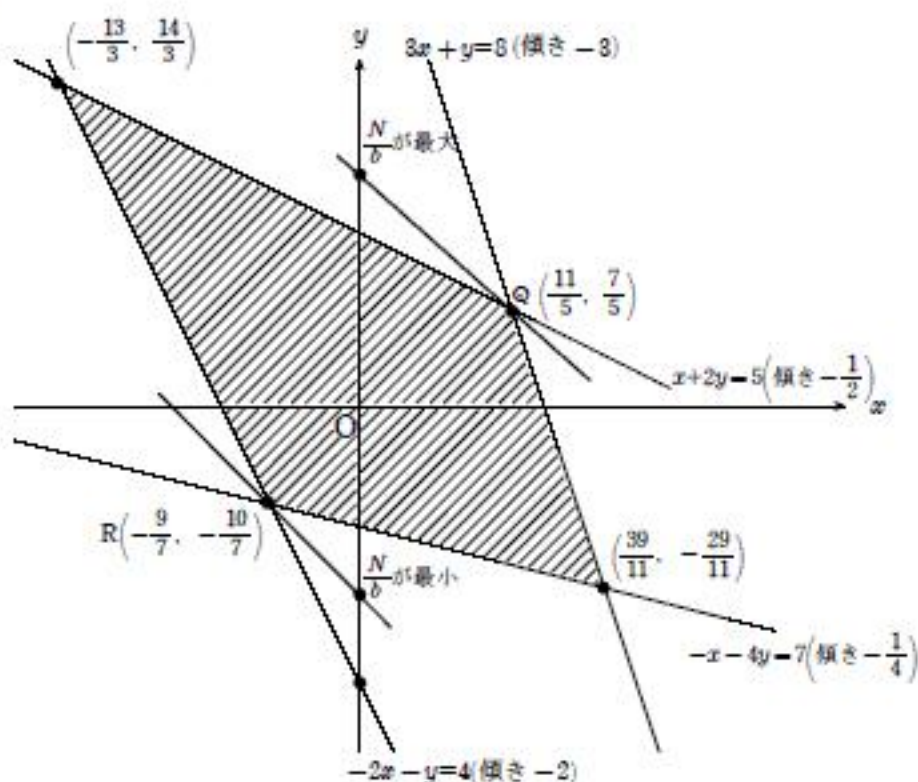
$PQ \perp$  平面ODE のとき,  $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$

$$\therefore t = \frac{1}{3} \quad \dots (\text{答}),$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{4}{3} \quad \therefore OP = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \dots (\text{答})$$



[2]



$D$  は図の斜線部分 (境界を含む)

- (1)  $x + y = M$  とおく.  $y = -x + M$  は傾き  $-1$ ,  $y$  切片  $M$  の直線であり, これが  $D$  と共有点をもつとき, 実数  $M$  が存在する.

$(x, y) = \left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$  のとき,  $M$  は最大値  $\frac{18}{5}$  をとり,

$(x, y) = \left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$  のとき,  $M$  は最小値  $-\frac{19}{7}$  をとる.

よって,  $Q\left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right), R\left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$  ... (答)

- (2)  $ax + by = N$  とおく.  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{N}{b}$  は傾き  $-\frac{a}{b}$ ,  $y$  切片  $\frac{N}{b}$  の直線 (仮定より,  $b > 0$ ) であり, これが  $D$  と共有点をもつとき, 実数  $N$  が存在する.

- (I) 点  $Q\left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5}\right)$  でのみ  $N$  が最大値をとるとき,

$y = -\frac{a}{b}x + \frac{N}{b}$  の  $y$  切片  $\frac{N}{b}$  を  $y$  軸方向正の方向へずらしていき, ちょうど点  $Q$  を通る

ときが  $D$  と共有点をもつ境界であればよいので, 傾き  $-\frac{a}{b}$  について,

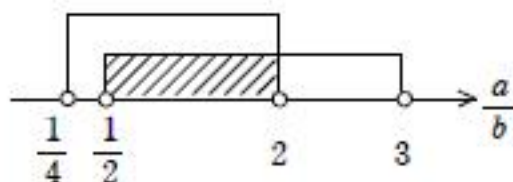
$$-3 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{2} \quad \therefore 3 > \frac{a}{b} > \frac{1}{2}$$

- (II) 点  $R\left(-\frac{9}{7}, -\frac{10}{7}\right)$  でのみ  $N$  が最小値をとるとき,

$y = -\frac{a}{b}x + \frac{N}{b}$  の  $y$  切片  $\frac{N}{b}$  を  $y$  軸方向負の方向へずらしていき, ちょうど点  $R$  を通る

ときが  $D$  と共有点をもつ境界であればよいので, 傾き  $-\frac{a}{b}$  について,

$$-2 < -\frac{a}{b} < -\frac{1}{4} \quad \therefore 2 > \frac{a}{b} > \frac{1}{4}$$



以上より,  $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$  ... (答)



〔3〕 表をF, 裏をTとし, 操作L, Rを行うときに $k$ の目が出た場合,  $Lk, Rk$ と書くことにする.

(1)

L6    T T T T T T    L1    T F F F F F  
L1    F T T T T T    L6    F T T T T T

の2通りが表1枚となる場合なので,  $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$  ... (答)

(2)

|   | L6 | T | T | T | T | T | T |    |
|---|----|---|---|---|---|---|---|----|
| ☆ | R1 | T | T | T | T | T | F | 1枚 |
| ☆ | R2 | T | T | T | T | F | F | 2枚 |
| ☆ | R3 | T | T | T | F | F | F | 3枚 |
| ☆ | R4 | T | T | F | F | F | F | 4枚 |
| ☆ | R5 | T | F | F | F | F | F | 5枚 |
|   | R6 | F | F | F | F | F | F | 6枚 |

|   | L4 | T | T | T | T | F | F |    |
|---|----|---|---|---|---|---|---|----|
| ☆ | R1 | T | T | T | T | F | T | 1枚 |
|   | R2 | T | T | T | T | T | T | 0枚 |
|   | R3 | T | T | T | F | T | T | 1枚 |
|   | R4 | T | T | F | F | T | T | 2枚 |
|   | R5 | T | F | F | F | T | T | 3枚 |
|   | R6 | F | F | F | F | T | T | 4枚 |

|   | L2 | T | T | F | F | F | F |    |
|---|----|---|---|---|---|---|---|----|
|   | R1 | T | T | F | F | F | T | 3枚 |
|   | R2 | T | T | F | F | T | T | 2枚 |
|   | R3 | T | T | F | T | T | T | 1枚 |
| ☆ | R4 | T | T | T | T | T | T | 0枚 |
|   | R5 | T | F | T | T | T | T | 1枚 |
|   | R6 | F | F | T | T | T | T | 2枚 |

|   | L5 | T | T | T | T | T | F |    |
|---|----|---|---|---|---|---|---|----|
| ☆ | R1 | T | T | T | T | T | T | 0枚 |
|   | R2 | T | T | T | T | F | T | 1枚 |
|   | R3 | T | T | T | F | F | T | 2枚 |
|   | R4 | T | T | F | F | F | T | 3枚 |
|   | R5 | T | F | F | F | F | T | 4枚 |
|   | R6 | F | F | F | F | F | T | 5枚 |

|   |    |   |   |   |   |   |   |    |
|---|----|---|---|---|---|---|---|----|
|   | L3 | T | T | T | F | F | F |    |
|   | R1 | T | T | T | F | F | T | 2枚 |
|   | R2 | T | T | T | F | T | T | 1枚 |
| ☆ | R3 | T | T | T | T | T | T | 0枚 |
|   | R4 | T | T | F | T | T | T | 1枚 |
|   | R5 | T | F | F | T | T | T | 2枚 |
|   | R6 | F | F | F | T | T | T | 3枚 |

|   |    |   |   |   |   |   |   |    |
|---|----|---|---|---|---|---|---|----|
|   | L1 | T | F | F | F | F | F |    |
|   | R1 | T | F | F | F | F | T | 4枚 |
|   | R2 | T | F | F | F | T | T | 3枚 |
|   | R3 | T | F | F | T | T | T | 2枚 |
|   | R4 | T | F | T | T | T | T | 1枚 |
| ☆ | R5 | T | T | T | T | T | T | 0枚 |
|   | R6 | F | T | T | T | T | T | 1枚 |

以上より, 期待値は

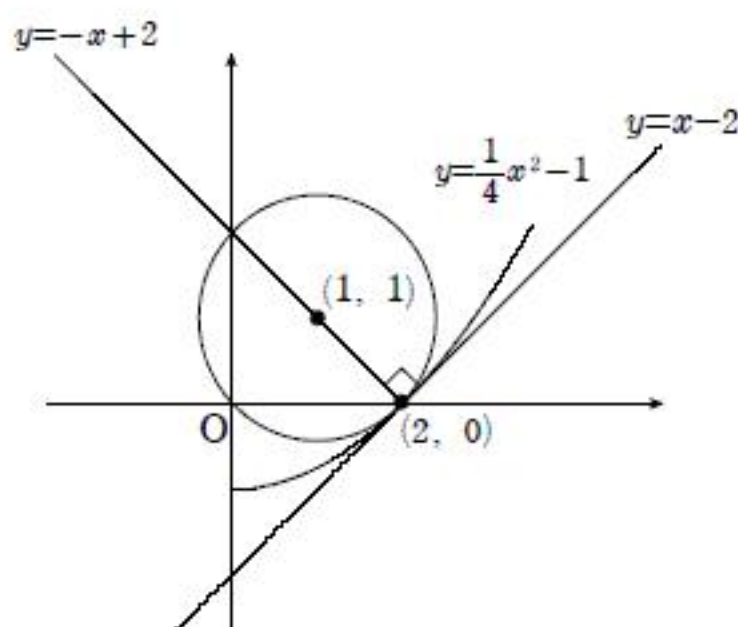
$$\frac{76}{36} = \frac{19}{9} \quad \dots \text{(答)}$$

(3) (2)で, ☆がついているものだけがすべて表となる可能性がある.

$$\therefore \frac{10}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{108} \quad \dots \text{(答)}$$

[4]

(1)



$y = x - 2$ , すなわち,  $x - y - 2 = 0$   
と円  $C$  の中心  $(1, 1)$  との距離  $d$  は,

$$d = \frac{|1 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

これは,  $C$  の半径と等しいので  
 $y = x - 2$  は  $C$  に接する.

また, 接点は  $C$  の中心を通り,  $y = x - 2$   
に垂直な直線  $y = -x + 2$  の交点である.

よって,  $(2, 0)$  ... (答)

(2)

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 & \dots\dots ① \\ y = \frac{1}{4}x^2 - 1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

②を①に代入して,

$$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right)^2 = 2$$

両辺を 16 倍して整理すると,

$$x^4 - 32x + 48 = 0$$

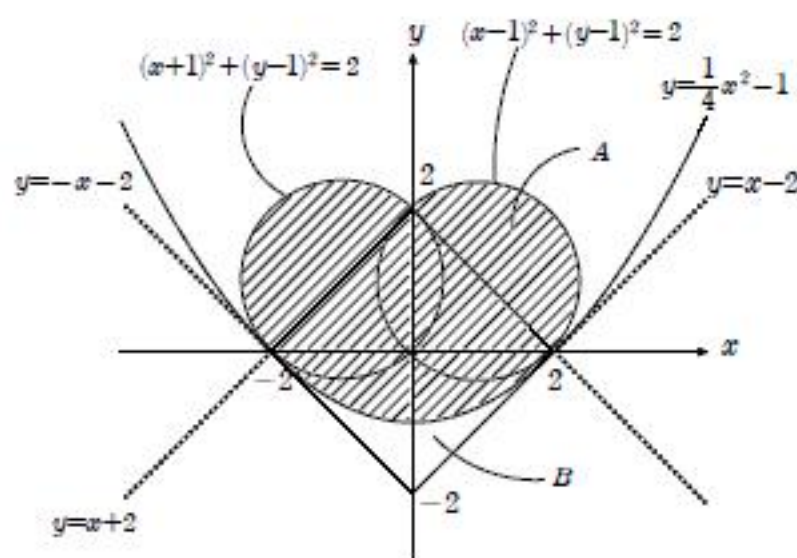
$$(x-2)^2(x^2 + 4x + 12) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ (重解)} \quad \text{このとき, } y = 0$$

よって, 共有点は  $(2, 0)$  のみ. ... (答)

(3)

図の網目の部分 (境界を含む)



(求める面積) =

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{2} + 4 \times 2 \times \frac{1}{2} + \frac{\pi(\sqrt{2})^2}{2} + \int_{-2}^2 \left\{ -\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) \right\} dx \\ &= 2\pi + \frac{20}{3} \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$