

[1] C_1, C_2 の交点の x 座標は

$$\sqrt{x} = \frac{a^3}{x}$$

$$x^3 = a^6$$

$$\therefore x = a^2$$

また、 $y = \sqrt{x}$ を微分すると、 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ より、 ℓ_1 の方程式は

$$y = \frac{1}{2a}(x - a^2) + a$$

$$= \frac{1}{2a}x + \frac{a}{2}$$

よって、求める面積は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + a\right) \cdot a^2 - \int_0^{a^2} \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{3}{4}a^3 - \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2}$$

$$= \frac{1}{12}a^3$$

(2) $y = \frac{a^3}{x}$ を微分すると $y' = -\frac{a^3}{x^2}$ より、

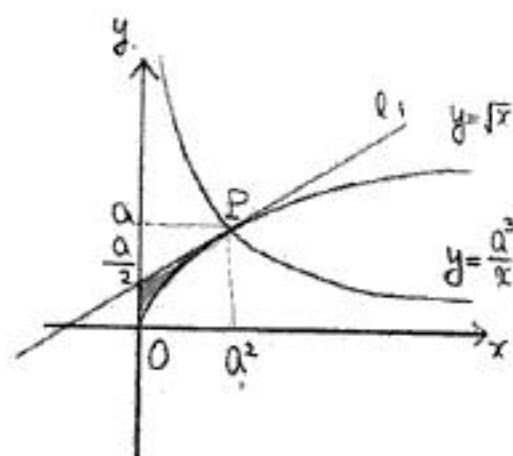
点 P における C_2 の接線の傾きは $-\frac{1}{a}$

よって、

$$\tan \theta(a) = \left| \frac{\frac{1}{2a} - \left(-\frac{1}{a}\right)}{1 + \frac{1}{2a} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} \right| = \left| \frac{3a}{2a^2 - 1} \right| = \frac{3a}{2a^2 - 1} \quad (\because a > 1)$$

よって $\lim_{a \rightarrow \infty} \tan \theta(a) = 0$, $0 < \theta(a) < \frac{\pi}{2}$ より、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \theta(a) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} a \sin \theta(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} a \tan \theta(a) \cos \theta(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3a^2}{2a^2 - 1} \cos \theta(a) \\ &= \frac{3}{2} \times \cos 0 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



[2]

$$\begin{cases} \vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OP} \\ \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{OP} \end{cases}$$

である.

$$\vec{OQ} = \beta\vec{OA} + \vec{OC}$$

とおくと,

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \beta\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OP}$$

ここで、直線PQと平面OMNは垂直であるから

$$\vec{PQ} \perp \vec{OM} \text{ かつ } \vec{PQ} \perp \vec{ON}$$

が成り立つ. よって

$$\{ (\beta\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OP}) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(\beta\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OC} + \vec{OP}) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$|\vec{OA}| = |\vec{OC}| = 1, \vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0, \vec{OA} \cdot \vec{OP} = \frac{1}{4}, \vec{OC} \cdot \vec{OP} = \frac{1}{2}$ より, ①は

$$\beta|\vec{OA}|^2 - 2|\vec{OP}|^2 + \vec{OA} \cdot \vec{OC} + 2\vec{OC} \cdot \vec{OP} + (2\beta - 1)\vec{OA} \cdot \vec{OP} = 0$$

$$\beta - 2|\vec{OP}|^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2\beta - 1) = 0$$

$$\therefore \frac{3}{2}\beta + \frac{3}{4} - 2|\vec{OP}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}'$$

同様に, ②より

$$|\vec{OC}|^2 - |\vec{OP}|^2 + \beta\vec{OA} \cdot \vec{OC} + \beta\vec{OA} \cdot \vec{OP} = 0$$

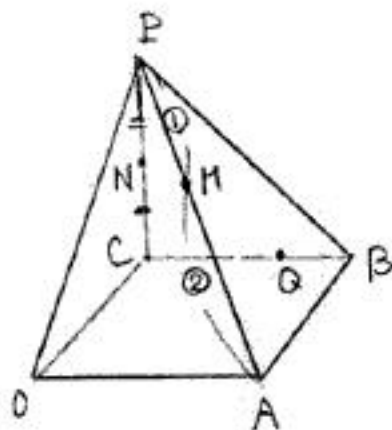
$$1 - |\vec{OP}|^2 + \frac{1}{4}\beta = 0 \quad \dots \textcircled{2}'$$

①', ②'より

$$\beta = \frac{5}{4}, \quad |\vec{OP}|^2 = \frac{21}{16}$$

したがって,

$$BQ:QC = 1:5, \quad OP = \frac{\sqrt{21}}{4}$$



[3]

(1) 2個のサイコロの目を a, b とおく ($a \leq b$). このとき、左端から見たとき、

- ① a 枚目までの硬貨は 2 回反転するから表
- ② $a+1$ 枚目から b 枚目の硬貨は 1 回反転するから裏
- ③ $b+1$ 枚目からは、1 回も反転しないので表
(上記にはその間の硬貨が 1 枚もない場合も含む)

例: $a=2, b=4$
 $\textcircled{\text{表}}\textcircled{\text{表}}\textcircled{\text{裏}}\textcircled{\text{裏}}\textcircled{\text{表}}\textcircled{\text{表}}$
 例: $a=3, b=6$
 $\textcircled{\text{表}}\textcircled{\text{表}}\textcircled{\text{表}}\textcircled{\text{裏}}\textcircled{\text{裏}}\textcircled{\text{裏}}$

よって、表が 1 枚 (裏が 5 枚) であるためには

$$b - a = 5$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (1, 6)$$

2 通りしかない。よって、目の順番を考えることにより、求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

(2) $6^2 (= 36)$ 通りの操作を表にすると下のようになる。

$L \backslash R$	1	2	3	4	5	6
1	X O O O O X	X O O O X X	X O O X X X	X O X X X X	X X X X X X	O X X X X X
2	X X O O O X	X X O O X X	X X O X X X	X X X X X X	X O X X X X	O O X X X X
3	X X X O O X	X X X O X X	X X X X X X	X X O X X X	X O O X X X	O O O X X X
4	X X X X O X	X X X X X X	X X X O X X	X X O O X X	X O O O X X	O O O O X X
5	X X X X X X	X X X X O X	X X X O O X	X X O O O X	X O O O O X	O O O O O X
6	X X X X X O	X X X X O O	X X X O O O	X X O O O O	X O O O O O	O O O O O O

(O: 表
X: 裏)

よって、表の枚数の確率分布表は下のようになる。

表の枚数	0	1	2	3	4	5	6
確率	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

これより、求める期待値は

$$0 \cdot \frac{5}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{6}{36} + 4 \cdot \frac{4}{36} + 5 \cdot \frac{2}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{19}{9}$$

(別解)

操作 L で a の目、操作 R で b の目が出たとする。X を表の枚数とおく。

(i) $a + b \leq 6$ のとき

このとき、2 回反転する所はなく、 $a + b$ が所が裏になるので

$$X = 6 - (a + b)$$

(ii) $a + b \geq 7$ のとき

このとき、 $a + b - 6$ 枚の硬貨は 2 回反転し表になり、他はすべて裏である。よって、

$$X = (a + b) - 6$$

(i), (ii) より、X は 2 個のサイコロの目の和に依存する確率変数であるので、確率分布表は下のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	6
目の和	6	5 または 7	4 または 8	3 または 9	2 または 10	11	12
確率	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(以下、本解に同じ)

(3) (2) より、次の 6 つの場合がある。

- ① $(L, R) = (6, 1)$ (XXXXXO) で 3 回目には 5
- ② $(L, R) = (6, 2)$ (XXXXOO) で 3 回目には 4
- ③ $(L, R) = (6, 3)$ (XXXOOO) で 3 回目には 3
- ④ $(L, R) = (6, 4)$ (XXOOOO) で 3 回目には 2
- ⑤ $(L, R) = (6, 5)$ (XOOOOO) で 3 回目には 1
- ⑥ L と R の目の和が 6 (XXXXXX) で 3 回目には 6

(カッコの中は
2 回の操作終了時
の硬貨の表裏)

よって、

$$\frac{5}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{108}$$

(①から⑤の分) (⑥の分)

[4]

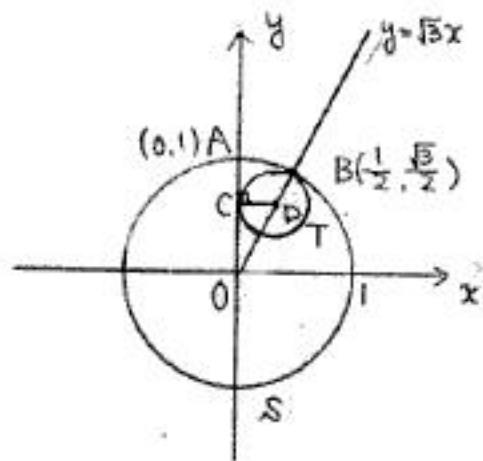
(1) $D(t, \sqrt{3}t)$ とおく ($t > 0$)

$$1 - OD = CD$$

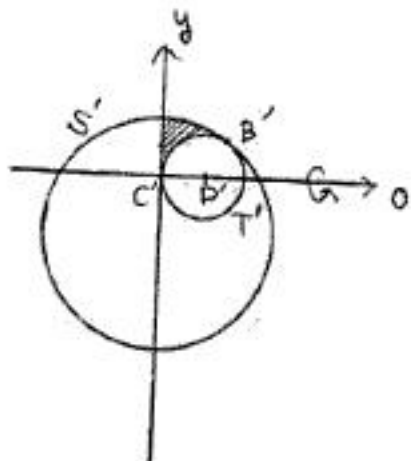
$$1 - 2t = t$$

$$\therefore t = \frac{1}{3}$$

よって、 $D(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 、 Γ の半径は $\frac{1}{3}$



(2) Γ 、 S 、 T を y 軸方向に $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ だけ平行移動した図形をそれぞれ、 S' 、 T' とする。このとき、右図の斜線部分の領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。



Γ' の方程式は

$$(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{1}{9}$$

$$\therefore y^2 = -x^2 + \frac{2}{3}x$$

一方、 S' の方程式は

$$x^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{3})^2 = 1$$

であるから、 S' の上半分を表す方程式は

$$y + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{1 - x^2}$$

よって、

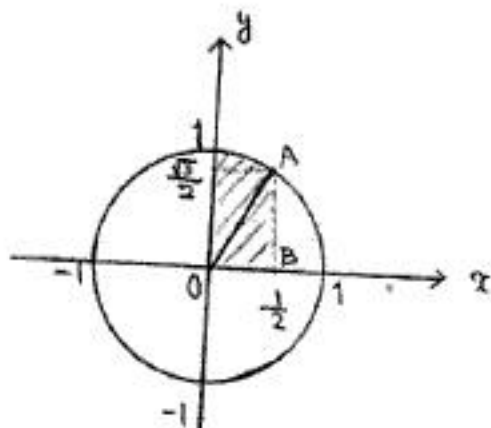
$$\begin{aligned} y^2 &= (\sqrt{1 - x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 \\ &= \frac{4}{3} - x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

したがって、求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{4}{3} - x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1 - x^2} \right) - \left(-x^2 + \frac{2}{3}x \right) \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx \\ &= \frac{7}{12}\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2 \end{aligned}$$

(参考)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} dx &= \Delta OAB + (\text{扇形の面積}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$



$$[5] \quad AB = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-6y & 4x-5y \\ -5t+x & -4t+x \end{pmatrix}$$

よって、ハミルトン-リ-の定理より、

$$(AB)^2 - (6x-6y-4t)(AB) + \det(AB) \cdot E = 0$$

$$\therefore (AB)^2 = (6x-6y-4t) \begin{pmatrix} 5x-6y & 4x-5y \\ -5t+x & -4t+x \end{pmatrix} - \det(AB) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $(AB)^2$ の対角成分より、

$$\begin{cases} (6x-6y-4t)(4x-5y) = 0 & \dots \textcircled{1} \\ (6x-6y-4t)(-5t+x) = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

よって、 $3x-3y-2t \neq 0$ のとき、 $\textcircled{2}$ より $x = 5t$

①より、

$$4x-5y = 0$$

$$\therefore y = \frac{4}{5}x = 4t$$

したがって、

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t & 4t \\ -6t & -5t \end{pmatrix} = tB$$

(2) $A \neq tB$ を示す。 $A = tB$ とすると、 $B^2 = E$ より、

$$\begin{cases} A^2 = (tB)^2 = t^2 B^2 = t^2 E \\ A^4 = (A^2)^2 = (t^2 E)^2 = t^4 E \end{cases}$$

$A^4 = E$ であるから、

$$t^4 = 1$$

$$\therefore t^2 = 1$$

これは $A^2 \neq E$ に矛盾する。したがって、 $A \neq tB$ が示された。

よって、(1) の対角成分を考えると、 $3x-3y-2t=0 \dots \textcircled{3}$

(3) ハミルトン-リ-の定理より、

$$A^2 + (-x^2+xy+ty)E = 0$$

$$A^2 = (x^2-xy-ty)E$$

$$\therefore A^4 = (x^2-xy-ty)^2 E$$

$A^2 \neq E$, $A^4 = E$ より、

$$x^2-xy-ty = -1 \dots \textcircled{4}$$

(2) と合わせると、

$$\begin{cases} 3x-3y-2t=0 & \dots \textcircled{3} \\ x^2-(x+t)y=-1 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

③ $\times (x+t)$ - ④ $\times 3$ より

$$3tx - 2t(x+t) = 3$$

$$tx = 2t^2 + 3$$

ここで、 $t \neq 0$ であるから、

$$x = 2t + \frac{3}{t}$$

$$\text{ゆえに} \quad x = 2t + \frac{3}{t}, \quad y = \frac{4t}{3} + \frac{3}{t}$$

(4) x, y, t が整数のとき、(3) より、 $\frac{3}{t}$ と $\frac{t}{3}$ が整数とわかるので、 $\frac{t}{3} = \pm 1$ である。

$$\begin{cases} t=3 \text{ のとき、} & x=7, y=5 \text{ より、} & A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix} \\ t=-3 \text{ のとき、} & x=-7, y=-5 \text{ より、} & A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$