

平成25年度入学試験問題

数 学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

(注 意 事 項)

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12 ページあります。
また，中にはさみ込まれている解答紙は，5 枚（**15** から **19** まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，
問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，
手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の 2 箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。
小問があるときは，小問の番号を明記して解答しなさい。
解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は，250 点満点です。なお，経済学部経済工学科については，
300 点満点に換算します。

数 学

数学 I, 数学 A
数学 II, 数学 B
数学 III, 数学 C

[1] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **15** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

$a > 1$ とし、2つの曲線

$$y = \sqrt{x} \quad (x \geq 0),$$

$$y = \frac{a^3}{x} \quad (x > 0)$$

を順に C_1, C_2 とする。また、 C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2) 点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0 < \theta(a) < \frac{\pi}{2}\right)$ 。
このとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} a \sin \theta(a)$ を求めよ。

(下書き用紙)

[2] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **16** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

一辺の長さが1の正方形OABCを底面とし、点Pを頂点とする四角錐POABCがある。ただし、点Pは内積に関する条件 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}$ 、および $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}$ をみたす。辺APを2:1に内分する点をMとし、辺CPの中点をNとする。さらに、点Pと直線BC上の点Qを通る直線PQは、平面OMNに垂直であるとする。このとき、長さの比BQ:QC、および線分OPの長さを求めよ。

(下書き用紙)

[3] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **17** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して、以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば、表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに、3 の目が出た場合は、裏裏表表裏表 となる。

以下、「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

- (1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき、表が 1 枚となる確率を求めよ。
- (2) 最初の状態から L, R の順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ。
- (3) 最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

(下書き用紙)

[4] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **18** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

原点 O を中心とし、点 $A(0, 1)$ を通る円を S とする。点 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が、点 C で y 軸に接しているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。
- (2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 $\widehat{AB}$ 、円 T の短い方の弧 $\widehat{BC}$ 、および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(下書き用紙)

[5] (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 **19** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

実数 x, y, t に対して、行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える。 $(AB)^2$ が対角行列、すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする。

(1) 命題「 $3x - 3y - 2t \neq 0 \implies A = tB$ 」を証明せよ。

以下 (2), (3), (4) では、さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4 = E$ であるとする。ただし、 E は単位行列を表す。

(2) $3x - 3y - 2t = 0$ を示せ。

(3) x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(4) x, y, t が整数のとき、行列 A を求めよ。

(下書き用紙)

(下書き用紙)