

[1]

$$(1) \quad d(P, l_1) \geq PO \text{ より, } |y+1| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{両辺 2 乗して整理すると, } y \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$d(P, l_2) \geq PA \text{ より, } |y-1| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\text{両辺 2 乗して整理すると, } y \leq -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

よって, 条件①をみたす点 P が存在するには,

$$2 \text{ つの放物線 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \text{ と } y = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2} \text{ が}$$

共有点をもてばよい. 2 式を連立して解いて,

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2}$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2 - 2}{2} = 0 \quad \dots(*)$$

判別式を D とおくと,

$$D = a^2 - 2(a^2 - 2) \geq 0$$

$$a^2 - 4 \leq 0$$

$$(a+2)(a-2) \leq 0$$

$$-2 \leq a \leq 2 \quad \dots(\text{答})$$

$$(2) \quad (*) \text{ の 2 解を } (\alpha, \beta) \text{ とおくと, } (\alpha < \beta)$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -\frac{1}{2}(x-a)^2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) \right\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ - \left(x^2 - ax + \frac{a^2 - 2}{2} \right) \right\} dx$$

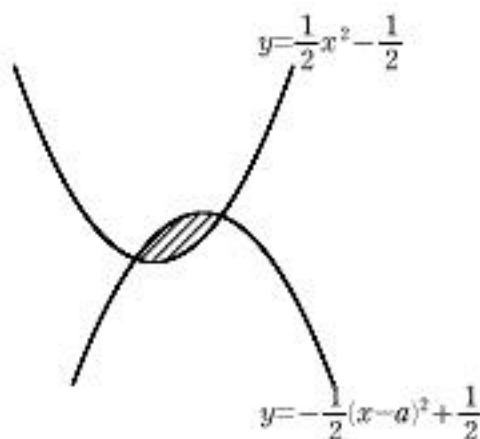
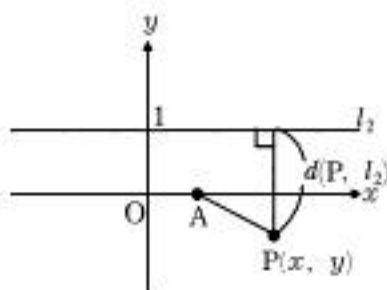
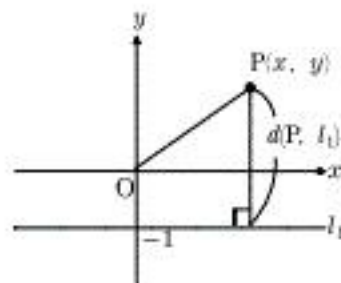
$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{a + \sqrt{-a^2 + 4}}{2} - \frac{a - \sqrt{-a^2 + 4}}{2} \right)^3$$

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{-a^2 + 4})^3$$

$$= \frac{-a^2 + 4}{6} \sqrt{-a^2 + 4} \quad \dots(\text{答})$$



[2]

(1) $a=3m$ (m は 1 以上の整数) のとき, $a^2=9m^2=3 \cdot 3m^2$

$a=3m+1$ (m は 0 以上の整数) のとき, $a^2=9m^2+6m+1=3 \cdot (3m^2+2m)+1$

$a=3m-1$ (m は 1 以上の整数) のとき, $a^2=9m^2-6m+1=3 \cdot (3m^2-2m)+1$

よって, a が 3 で割り切れるときは, a^2 を 3 で割ると余り 0, a が 3 で割り切れないときは, a^2 を 3 で割ると余り 1. ■

(2) a, b のどちらか一方が 3 で割り切れないとき, a^2+b^2 を 3 で割ると余り 1.

$3c^2$ は 3 で割り切れるので, $a^2+b^2 \neq 3c^2$.

a, b の両方とも 3 で割り切れないとき, a^2+b^2 を 3 で割ると余り 2.

$3c^2$ は 3 で割り切れるので, $a^2+b^2 \neq 3c^2$.

a, b の両方とも 3 で割り切れるとき, $a=3a', b=3b'$ (a', b' は自然数) とおくと,

$a^2+b^2=3c^2$ より, $9a'^2+9b'^2=3c^2$

$$\therefore 3(a'^2+b'^2)=c^2$$

左辺は 3 で割り切れるので, 右辺も 3 で割り切れる. よって, c は 3 の倍数.

以上より, a, b, c はすべて 3 で割り切れる. ■

(3) (2) より, $a=3^l A, b=3^m B, c=3^n C$ (l, m, n は自然数, A, B, C は 3 で割り切れない自然数) とおくと, $a^2+b^2=3c^2$ のとき,

$$3^{2l} A^2 + 3^{2m} B^2 = 3^{2n+1} C^2$$

$2l, 2m$ は偶数で $2n+1$ は奇数より, $2l \leq 2n+1, 2m \leq 2n+1$

ここで $2l \leq 2m$ としても一般性を失わない.

(i) $2l \leq 2m, 2l \leq 2n+1$ のとき, 両辺を 3^{2l} で割って,

$$A^2 + (3^{m-l} B)^2 = 3 \cdot (3^{n-l} C)^2$$

A は 3 で割り切れないので, (2) に矛盾する.

(ii) $2n+1 < 2l, 2l \leq 2m$ のとき, 両辺を 3^{2n} で割って,

$$(3^{l-n} A)^2 + (3^{m-n} B)^2 = 3C^2$$

C は 3 で割り切れないので, (2) に矛盾する.

以上より, $a^2+b^2=3c^2$ をみたす自然数 a, b, c は存在しない. ■

[3]

(1) 正弦定理より, $\frac{AB}{\sin C} = 2R \quad \therefore AB = 2R \sin C$ また, $\frac{AD}{\sin B} = \sin C$

$\therefore AD = AB \sin B = 2R \sin C \cdot \sin B = 2R \sin B \sin C$ ■

また, 正弦定理より, $\frac{BC}{\sin A} = 2R \quad \therefore BC = 2R \sin A$

$BC = 2BE$ であり, $\triangle OBE$ に三平方の定理を用いると,

$$OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - (R \sin A)^2} = \sqrt{R^2 (1 - \sin^2 A)} = \sqrt{R^2 \cos^2 A} = R |\cos A|$$

A は鋭角より, $\cos A > 0 \quad \therefore OE = R \cos A$ ■

(2) G と O が一致するとき, A, G, E すなわち A, O, E が一直線にあることから,

$\angle AEB = 90^\circ$, また, E は BC の中点より, $\triangle ABE \cong \triangle ACE$ となり, $AB = AC$.

同様に O から AB に垂線を下ろせば, $AC = BC$.

$\therefore AB = AC = BC$ となるので, $\triangle ABC$ は正三角形 ■

(3) $OG \parallel BC$ より, $\angle EOG = \angle OEB = 90^\circ$ (平行線の錯角)

OG と AD の交点を F とすると, $OE \parallel AF$ より,

$\triangle GOE \sim \triangle GFA$, 相似比は $GE : GA = 1 : 2$

また, 四角形 $OEDF$ は長方形であるから, $OE = FD$

$\therefore AD : OE = (AF + FD) : OE = (AF + OE) : OE = (2 + 1) : 1 = 3 : 1$

$AD = 3OE$ ■

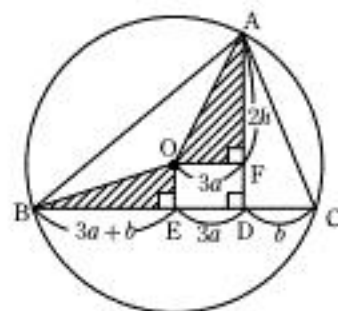
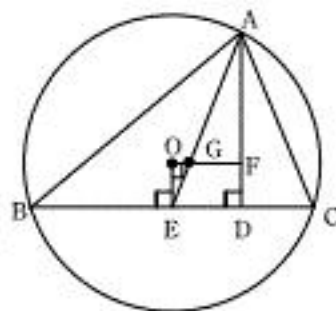
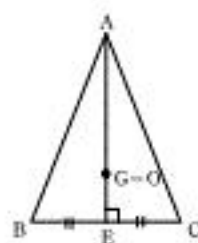
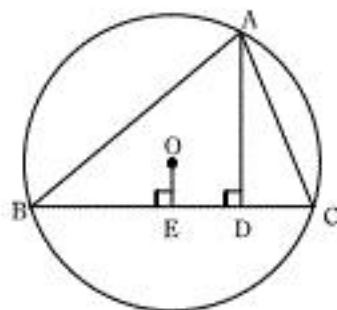
$OG = a$, $DC = b$, $OE = h$ とおくと, $\triangle OBE$, $\triangle OAF$ に三平方の定理を用いて,

$$(3a + b)^2 + h^2 = R^2, (3a)^2 + (2h)^2 = R^2$$

$$(3a + b)^2 + h^2 = (3a)^2 + (2h)^2$$

$$6ab + b^2 = 3h^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan B \tan C &= \frac{AD}{BD} \cdot \frac{AD}{CD} \\ &= \frac{3h}{6a + b} \cdot \frac{3h}{b} \\ &= \frac{9h^2}{6ab + b^2} \\ &= \frac{9h^2}{3h^2} = 3 \quad \blacksquare \end{aligned}$$



[4]

(1) A が 3 枚とも表となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, 2 枚だけ表となる確率は ${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$,

1 枚だけ表となる確率は ${}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$, すべて裏となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

B が 2 枚とも表となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 10 円硬貨だけ表となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

5 円硬貨だけ表となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 2 枚とも裏となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

○の部分をして, $p = \frac{3}{8}$... (答)

○の部分をして, $q = \frac{1}{4}$... (答)

A \ B	15 円	10 円	5 円	0 円
15 円	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$
10 円	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$
5 円	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$
0 円	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$

(2) 上下の表より,

$$\begin{aligned}
 E &= 5 \cdot \frac{1}{32} + 10 \cdot \frac{1}{32} + 15 \cdot \frac{1}{32} \\
 &\quad - 5 \cdot \frac{3}{32} + 10 \cdot \frac{3}{32} + 15 \cdot \frac{3}{32} \\
 &\quad - 10 \cdot \frac{3}{32} - 10 \cdot \frac{3}{32} + 15 \cdot \frac{3}{32} \\
 &\quad - 15 \cdot \frac{1}{32} - 15 \cdot \frac{1}{32} - 15 \cdot \frac{1}{32} + 15 \\
 &= \frac{255}{16} \quad \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

A \ B	15 円	10 円	5 円	0 円
15 円	±0 円	+5 円	+10 円	+15 円
10 円	-5 円	±0 円	+10 円	+15 円
5 円	-10 円	-10 円	±0 円	+15 円
0 円	-15 円	-15 円	-15 円	±0 円