

【1】

(1)

与えられた関数 $f(x) = x - \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を微分すると,

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

となるから, ℓ の接点の x 座標は,

$$f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

と求まる。したがって, 求める接点の座標は

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

となり, このとき, ℓ の方程式は,

$$y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 接線 } \ell: y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 接点の座標: } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(2)

まず, 曲線 $y = f(x)$ の概形を調べる。(1)より,

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

となるから, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

したがって, $0 \leq x \leq a = \frac{\pi}{3}$ の範囲において, $f(x) \geq 0$ であることがわかるから, 求める回

転体の体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - \sin x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x^2 - 2x \sin x + \sin^2 x) dx \end{aligned}$$

と立式できる。ここで, C を積分定数として, 被積分関数それぞれの不定積分を求めると,

$$\begin{aligned} \int x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3 + C \\ \int x \sin x dx &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \\ \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C \end{aligned}$$

となるから, V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x^2 - 2x \sin x + \sin^2 x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - 2(-x \cos x + \sin x) + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{\pi^3}{81} - 2 \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \right) - (0 - 0 + 0) \right\} \\ &= \frac{\pi^4}{81} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{9\sqrt{3}\pi}{8} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\pi^4}{81} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{9\sqrt{3}\pi}{8}$$

[2]

(1)

a を 3 で割った余りで場合分けをして、各場合において題意が成立することを示す。以下、 m を自然数とする。

[1] a を 3 で割った余りが 1 または 2 であるとき

$a = 3m - 2$ または $a = 3m - 1$ と表せるから、 a^2 はそれぞれ、

$$\begin{aligned} a^2 &= (3m - 2)^2 \\ &= 3(3m^2 - 4m + 1) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= (3m - 1)^2 \\ &= 3(3m^2 - 2m) + 1 \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 a^2 を 3 で割った余りは 1 となる。

[2] a を 3 で割ったあまりが 0 であるとき

$a = 3m$ と表せるから、 a^2 は

$$\begin{aligned} a^2 &= 9m^2 \\ &= 3 \cdot 3m^2 \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 a^2 を 3 で割った余りは 0 となる。

以上[1], [2]より、 a^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 となる。

(証明終)

(2)

自然数 a, b, c が

$$a^2 + b^2 = 3c^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たすと仮定すると、この等式の右辺は 3 の倍数であるため、左辺は 3 の倍数でなければならない。つまり、 $a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは 0 でなくてはならない。ここで(1)の結果を踏まえると、 $a^2 + b^2$ が 3 で割り切れるのは a と b がともに 3 の倍数であるときのみである。よって、このとき、 p, q を自然数として $a = 3p, b = 3q$ とおくと、 $\textcircled{1}$ は、

$$\begin{aligned} 9p^2 + 9q^2 &= 3c^2 \\ \Leftrightarrow 3p^2 + 3q^2 &= c^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。さらに、 $\textcircled{2}$ の左辺は 3 の倍数となるから、右辺も 3 の倍数にならなければならない。したがって、 c も 3 の倍数でなければならない。以上より、 a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならない。

(証明終)

(3)

背理法で示す。 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 a, b, c が存在すると仮定すると、(2)より、 a, b, c はすべて 3 の倍数でなければならないから、 p, q, r を自然数として、 $a = 3p, b = 3q, c = 3r$ とおける。このとき、 $\textcircled{1}$ は、

$$\begin{aligned} 9p^2 + 9q^2 &= 27r^2 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 &= 3r^2 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となるが、 p, q, r は自然数であるから、 $\textcircled{3}$ に(2)の結果を適用することができて、 p, q, r も 3 で割りきれなければならないことがわかる。この議論をくりかえし行うことで、特に a は何度でも 3 で割り切れなければならないことがわかるが、これは a が自然数であることに矛盾する。したがって、背理法より、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことが示された。

(証明終)

[3]

(1)

与えられた楕円①の方程式に、直線の式 $y=x+a$ を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(x+a-1)^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 + 4(x+a-1)^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 4(2a-1)x + 4(a^2 - 2a - 2) &= 0 \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。楕円①と直線 $y=x+a$ が交点をもつのは、方程式②が実数解をもつときであるから、 x に関する 2 次方程式②の判別式を D とおくと、求める条件は、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4(2a-1)^2 - 5 \cdot 4(a^2 - 2a - 2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 6a - 11 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} \leq a \leq 3 + 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

となる。したがって、求める a の範囲は、 $3 - 2\sqrt{5} \leq a \leq 3 + 2\sqrt{5}$ である。

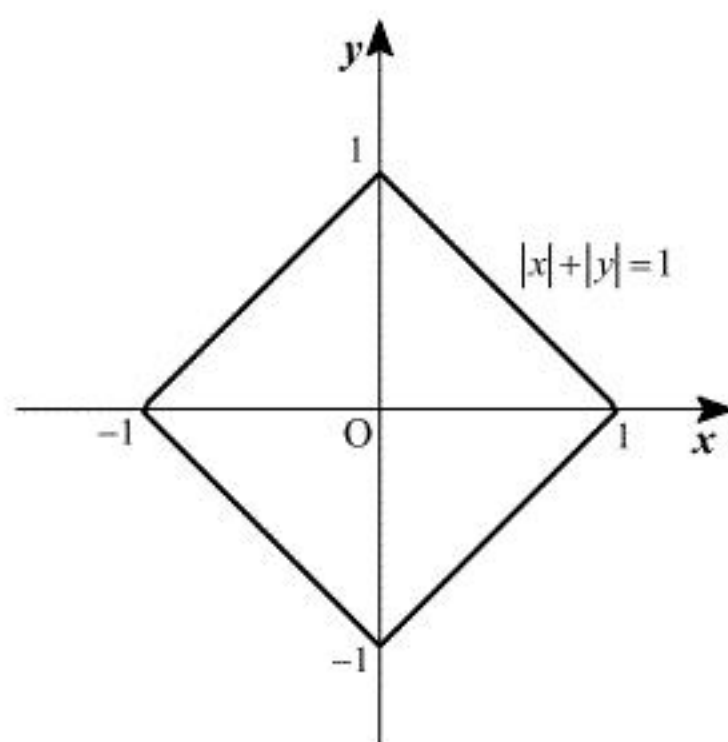
(答) $3 - 2\sqrt{5} \leq a \leq 3 + 2\sqrt{5}$

(2)

x, y の正負で場合分けをすると、

$$|x| + |y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & (x \geq 0, y \geq 0 \text{ のとき}) \\ x-y=1 & (x \geq 0, y < 0 \text{ のとき}) \\ -x+y=1 & (x < 0, y \geq 0 \text{ のとき}) \\ -x-y=1 & (x < 0, y < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって、 xy 平面上において $|x| + |y| = 1$ を満たす点 (x, y) 全体がなす図形の概形を図示すると、以下の図のようになる。



(答) 前図

(3)

xy 平面上において、点 (x, y) が楕円①上を動くとき、

$$k = |x| + |y| \quad \cdots \textcircled{3}$$

のとり得る値の範囲を W をおくと、

$$k \in W \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \\ |x| + |y| = k \end{cases} \text{ を満たす実数の組 } (x, y) \text{ が存在する}$$

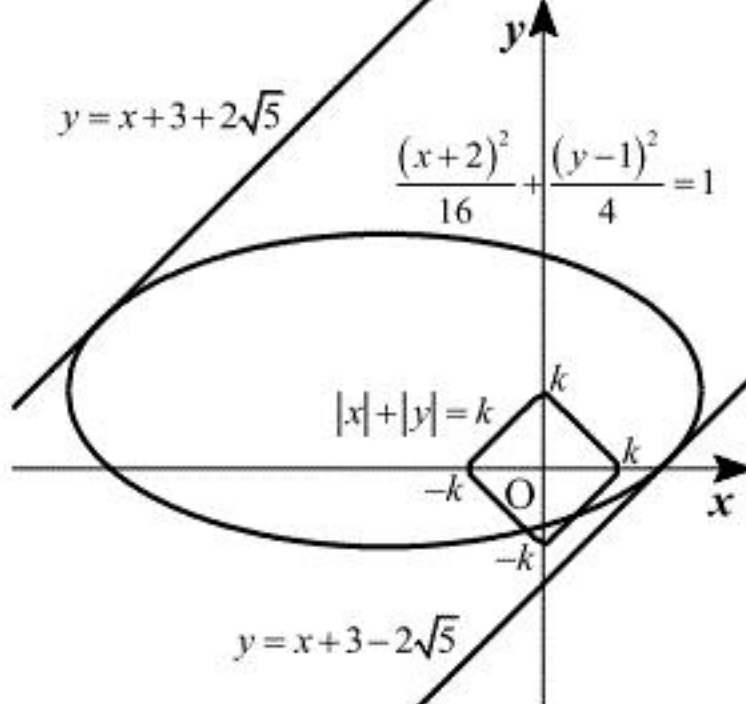
$$\Leftrightarrow xy \text{ 平面上において楕円①と③が表す図形が共有点をもつ}$$

となるから、以下 xy 平面上において、楕円①と③が表す図形が共有点をもつ条件を考えることによって、 k のとり得る値の最小値と最大値を求める。

まず、③が表す図形が xy 平面上に存在するための必要条件として、

$$k \geq 0$$

である必要がある。この条件を満たすときに、楕円①、③が表す図形、直線 $y=x+a$ を xy 平面上に図示すると、(2)より、以下の図のようになる。(ただし、 $k=0$ のときは③は原点を表す。)



k の値が大きくなるにつれて、③が表す正方形の一辺の長さは大きくなることに注意して、以下 k が最小値をとるときと、最大値をとるときの様子をそれぞれ調べることにする。

[1] k が最小値をとるとき

k の値を十分小さな値から大きくしていくとき、楕円①と正方形③が初めて共有点をもつのは、上図より、 x 軸または y 軸上で共有点をもつときであることがわかる。ここで、楕円①と x 軸の交点の x 座標を調べると、

$$\begin{aligned}\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(0-1)^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \pm 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。また、同様に、楕円①と y 軸の交点の y 座標を調べると、

$$\begin{aligned}\frac{(0+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= 1 \pm \sqrt{3}\end{aligned}$$

となるから、4 つの値

$$|-2 - 2\sqrt{3}| + |0|, |-2 + 2\sqrt{3}| + |0|, |0| + |1 - \sqrt{3}|, |0| + |1 + \sqrt{3}|$$

を比較することで、求める k の最小値は、

$$\begin{aligned}k &= |0| + |1 - \sqrt{3}| \\ &= \sqrt{3} - 1\end{aligned}$$

であり、この値を与える (x, y) は、

$$(x, y) = (0, 1 - \sqrt{3})$$

であることがわかる。

[2] k が最大値をとるとき

k の値を十分大きな値から小さくしていくとき、楕円①と正方形③が初めて共有点をもつのは、上図より、楕円①と正方形③の一辺が接するときであることがわかる。ここで、楕円①と接する、傾き 1 の直線を調べると、(1)より、

$$y = x + 3 - 2\sqrt{5}, y = x + 3 + 2\sqrt{5}$$

であることがわかり、また、(1)と同様にして、楕円①と接する、傾き -1 の直線を調べると、

$$y = -x - 1 - 2\sqrt{5}, y = -x - 1 + 2\sqrt{5}$$

となることがわかる。ここで、上図より、

$$\text{正方形③の一辺が} \begin{cases} \text{直線 } y = x + 3 - 2\sqrt{5} \text{ の一部となるのは } k = -(3 - 2\sqrt{5}) \text{ のとき} \\ \text{直線 } y = x + 3 + 2\sqrt{5} \text{ の一部となるのは } k = 3 + 2\sqrt{5} \text{ のとき} \\ \text{直線 } y = -x - 1 - 2\sqrt{5} \text{ の一部となるのは } k = -(-1 - 2\sqrt{5}) \text{ のとき} \\ \text{直線 } y = -x - 1 + 2\sqrt{5} \text{ の一部となるのは } k = -1 + 2\sqrt{5} \text{ のとき} \end{cases}$$

となることがわかるから、4 つの値

$$-3 + 2\sqrt{5}, 3 + 2\sqrt{5}, 1 + 2\sqrt{5}, -1 + 2\sqrt{5}$$

を比較することで、求める k の最大値は、

$$k = 3 + 2\sqrt{5}$$

であり、この値を与える x は、 $a = 3 + 2\sqrt{5}$ のときの②の重解として求めることができて、

$$\begin{aligned}x &= -\frac{2}{5}(2a - 1) \\ &= -2 - \frac{8\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

であり、このときの y は、

$$\begin{aligned}y &= -2 - \frac{8\sqrt{5}}{5} + a \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

であることがわかる。

(答) $(x, y) = (0, 1 - \sqrt{3})$ のとき、最小値: $\sqrt{3} - 1$

$(x, y) = \left(-2 - \frac{8\sqrt{5}}{5}, 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ のとき、最大値: $3 + 2\sqrt{5}$

[4]

以下、本問では各硬貨を投げたとき、表裏は同様に確からしく出うるものとする。

(1)

Aさんの投げた5円硬貨のうち、 n 枚($n=0, 1, 2, 3$)が表になる確率は ${}_3C_n\left(\frac{1}{2}\right)^3$ であるから、
Aさんの投げた硬貨のうち、表が出た硬貨の合計金額とその確率を表にまとめると以下のようになる。

合計金額	0円	5円	10円	15円
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

また、Bさんの投げた5円硬貨、10円硬貨が表になる確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるから、Bさんの投げた硬貨のうち、表が出た硬貨の合計金額とその確率を表にまとめると以下のようになる。

合計金額	0円	5円	10円	15円
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

ここで、AさんがBさんに勝つとき、AさんとBさんの表が出た硬貨の合計金額の組み合わせを、 (a, b) (a :Aさんの合計金額、 b :Bさんの合計金額)と表すことにすると、

$(15, 0), (15, 5), (15, 10), (10, 0), (10, 5), (5, 0)$

である。また、Aさんが硬貨を投げる試行と、Bさんが硬貨を投げる試行は互いに影響を及ぼさないことに注意すると、求める確率 p は、上の二つの表より、

$$p = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{8}$$

と求まる。

一方、引き分けとなるとき、AさんとBさんの表が出た硬貨の合計金額の組み合わせは

$(15, 15), (10, 10), (5, 5), (0, 0)$

であるから、求める確率 q は、同様にして

$$q = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}$$

と求まる。

(答) $p = \frac{3}{8}, q = \frac{1}{4}$

(2)

(1)より、AさんとBさんの表が出た硬貨の合計金額の組み合わせと、その確率と、そのときに硬貨のやりとりが終わった後のAさんが持っている硬貨の合計金額とを対応させた表をつくると、以下のようになる。

ただし、題意より、表が出た硬貨の合計金額の組み合わせが (a, b) でAさんがBさんに勝った場合、Aさんが持っている硬貨の合計金額は、

$15 + (15 - b) = 30 - b$ [円]

であり、引き分けた場合は、常に

15 [円]

であり、負けた場合は、

a [円]

であることに注意する。

表の金額の組み合わせ	確率	Aさんが持つ金額
(15, 0)	$\frac{1}{32}$	30
(15, 5)	$\frac{1}{32}$	25
(15, 10)	$\frac{1}{32}$	20
(15, 15)	$\frac{1}{32}$	15
(10, 0)	$\frac{3}{32}$	30
(10, 5)	$\frac{3}{32}$	25
(10, 10)	$\frac{3}{32}$	15
(10, 15)	$\frac{3}{32}$	10
(5, 0)	$\frac{3}{32}$	30
(5, 5)	$\frac{3}{32}$	15
(5, 10)	$\frac{3}{32}$	5
(5, 15)	$\frac{3}{32}$	5
(0, 0)	$\frac{1}{32}$	15
(0, 5)	$\frac{1}{32}$	0
(0, 10)	$\frac{1}{32}$	0
(0, 15)	$\frac{1}{32}$	0

したがって、ゲーム終了後にAさんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E は

$$E = (30 + 25 + 20 + 15) \cdot \frac{1}{32} + (30 + 25 + 15 + 10) \cdot \frac{3}{32}$$
$$+ (30 + 15 + 5 + 5) \cdot \frac{3}{32} + (15 + 0 + 0 + 0) \cdot \frac{1}{32}$$
$$= \frac{255}{16}$$

と求まる。

(答) $E = \frac{255}{16}$

$n \geq 2$ とする。与えられた関数

$$f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

は、 $x = \frac{1}{k} (k=1, 2, \dots, n)$ で $f_n(x) = 0$ となる。また、この関数は多項式であるから、実数全体

で微分可能であるため、特に $\frac{1}{k+1} \leq x \leq \frac{1}{k} (k=1, 2, \dots, n-1)$ の範囲で平均値の定理を用いることができ、

$$\begin{aligned} \frac{f_n\left(\frac{1}{k}\right) - f_n\left(\frac{1}{k+1}\right)}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} &= f'_n(a) \\ \Leftrightarrow f'_n(a) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす実数 a が、区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ に少なくとも一つ存在することがわかる。したがって、 $f'_n(a) = 0$ を満たす、相異なる実数 a は、実数全体では少なくとも $n-1$ 個存在することがわかるが、一方で、 $f_n(x)$ は n 次の多項式であることに注意すると、 $f'_n(x)$ は $n-1$ 次の多項式であるから、方程式

$$f'_n(x) = 0$$

の実数解の個数は $n-1$ 個以下であることがわかる。したがって、各区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ に $f'_n(a) = 0$ を満たす実数 a が一つずつ存在することがわかるから、これに対応する実数を $a_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ とおくと、 $\frac{1}{k+1} < a_k < \frac{1}{k} (k=1, 2, \dots, n-1)$ を満たし、 $f'_n(x)$ は、最高次の項の係数が正であることに注意すると、正の実数 A を用いて

$$f'_n(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

と因数分解できることがわかる。ここで、 $a_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ はすべて異なる実数であるから、①の表示より、 $f'_n(x)$ は $x = a_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ の前後で符号変化することがわかる。し

たがって、 $f_n(x)$ は区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることが示された。