

[11]

$$(1) \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + ax + b \end{cases} \text{を連立して解くと,}$$

$$x^2 = -x^2 + ax + b$$

$$2x^2 - ax - b = 0 \quad \dots\dots(*)$$

(*) の判別式を D とおくと, 条件より,

$$D = a^2 + 8b > 0 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) C_1 と C_2 の共有点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおく,
条件より,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + ax + b) - x^2\} dx = 9$$

$$-2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = 9$$

$$\frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = 9$$

$\beta > \alpha$ より, $\beta - \alpha = 3$

ここで, α, β は, (*) の 2 解であるから,

$$\beta - \alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8b}}{4} - \frac{a - \sqrt{a^2 + 8b}}{4} = \frac{\sqrt{a^2 + 8b}}{2}$$

これより,

$$\frac{\sqrt{a^2 + 8b}}{2} = 3$$

$$a^2 + 8b = 6^2$$

$$b = -\frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) y = -x^2 + ax + b = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b \text{ より, } C_2 \text{ の頂点は, } \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} + b\right)$$

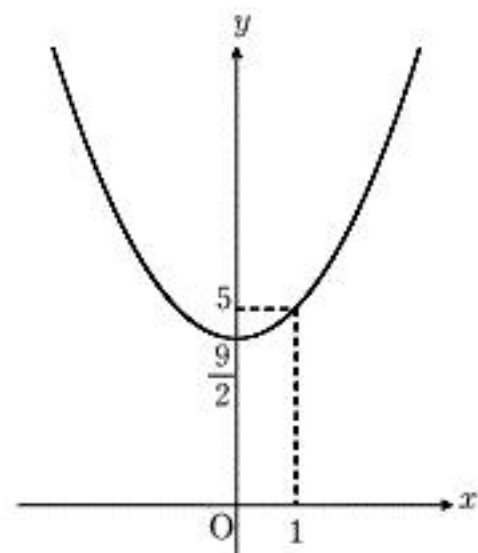
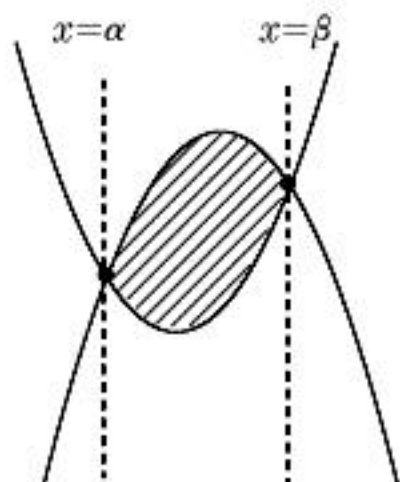
C_2 の頂点を (X, Y) とおくと,

$$\begin{cases} X = \frac{a}{2} \end{cases} \quad \dots\dots①$$

$$\begin{cases} Y = \frac{a^2}{4} + b = \frac{a^2}{4} + \left(-\frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}\right) = \frac{a^2}{8} + \frac{9}{2} \end{cases} \quad \dots\dots②$$

$$\text{①, ②より, } a \text{ を消去して, } Y = \frac{1}{2}X^2 + \frac{9}{2}$$

$$\text{よって, } C_2 \text{ の頂点の軌跡は, 放物線 } y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$



$\dots\dots(\text{答})$

[2]

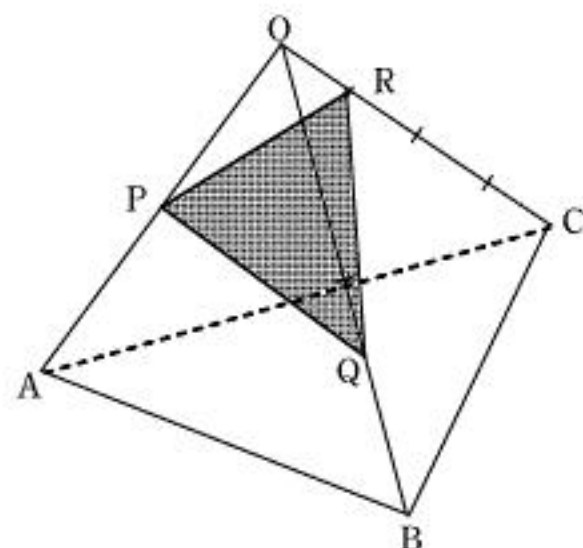
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく. 条件より,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$$



$$(1) |\overrightarrow{PQ}|^2 = \left| \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} \text{ より,}$$

$$PQ = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2 = \left| \frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \right|^2 = \frac{1}{16}|\vec{c}|^2 - \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \text{ より,}$$

$$PR = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2)

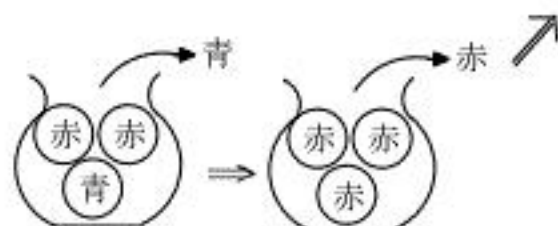
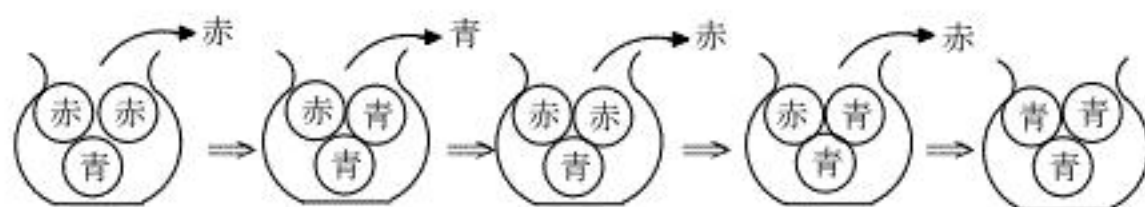
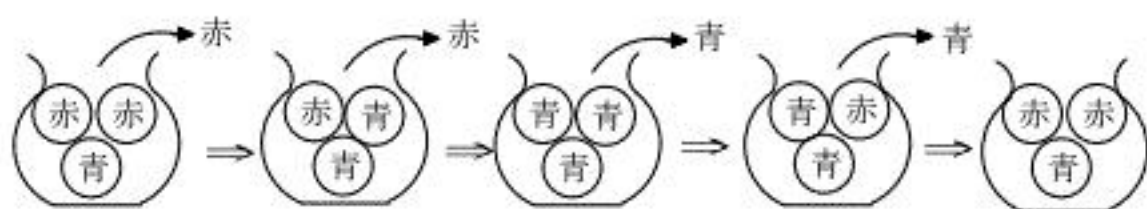
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \right) \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} \right) = \frac{1}{6}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{8}\vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{48} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \Delta PQR &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{36} \cdot \frac{3}{16} - \left(\frac{5}{48} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{131}}{96} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

[3]

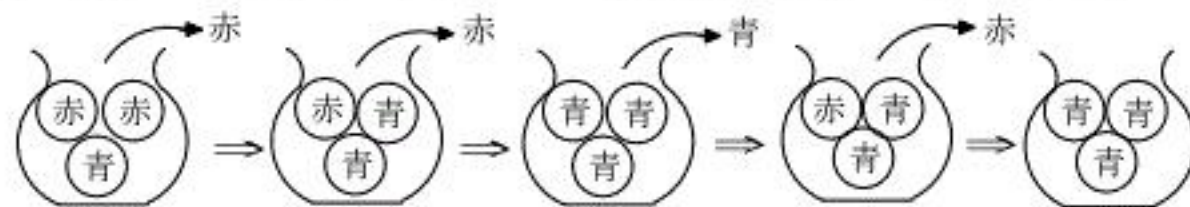
もらう硬貨の総数が1枚となるのは、赤玉が2回目に0個、4回目に2個になるか、または2回目に2個、4回目に0個になるかのどちらか。



よって、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{26}{81} \quad \dots\dots(\text{答})$$

もらう硬貨の総数が2枚となるのは、赤玉が2回目と、4回目に0個になるとき



よって、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27} \quad \dots\dots(\text{答})$$

[4]

(1) $n=2m$ (m は自然数) とおくと,

$$2^n - 1 = 2^{2m} - 1 = 4^m - 1 = (4 - 1)(4^{m-1} + 4^{m-2} + \dots + 4^0) = 3(4^{m-1} + 4^{m-2} + \dots + 4^0)$$

よって, $2^n - 1$ は 3 の倍数 ■

(2) p が偶数のとき, $p=2$ であり, このとき, 与式は, $2^1 - 1 = 2^k \quad \therefore k=0$

p が奇数のとき, p は素数であるから, $p=2m+1$ (m は自然数) とおくと, 与式は

$$2^{2m} - 1 = p^k$$

(1)より, 左辺は 3 の倍数であるから, $p=3$ このとき, $m=1$ となり, $2^2 - 1 = 3^k$ より,

$$k=1$$

以上より,

$$(p, k) = (2, 0), (3, 1) \quad \dots\dots(\text{答})$$