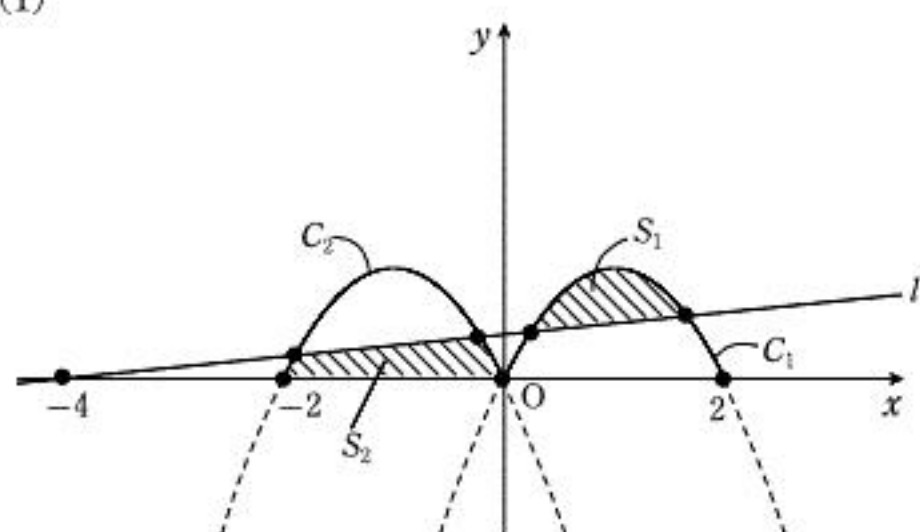


[1]

(1)



$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = a(x+4) \end{cases} \text{を連立して解くと,}$$

$$-x^2 + 2x = a(x+4)$$

$$x^2 + (a-2)x + 4a = 0 \quad \cdots (*)$$

(*)の判別式を D とすると、条件より、

$$D = (a-2)^2 - 16a > 0$$

$$a^2 - 20a + 4 > 0$$

$$a < 10 - 4\sqrt{6}, 10 + 4\sqrt{6} < a$$

(*)の解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 $\alpha + \beta = 2 - a > 0$ であるから $a < 2$.

また、 a は l の傾きであり、図より $a \geq 0$ は明らかであるから、

$$0 \leq a < 10 - 4\sqrt{6} \quad \cdots \text{ (答)}$$

(2) (*)の解を α, β ($\alpha < \beta$) とおく.

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + 2x) - a(x+4)\} dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6}D^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}(\sqrt{a^2 - 20a + 4})^3 \quad \cdots \text{ (答)} \end{aligned}$$

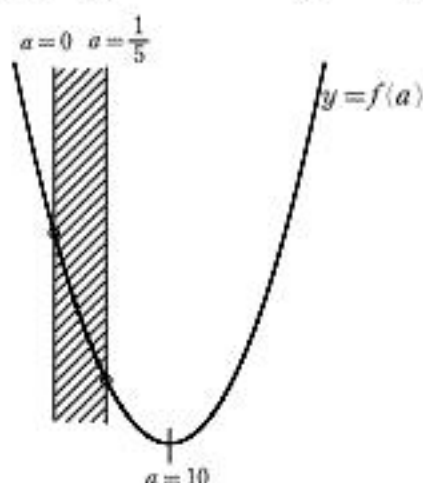
(3) l と C_2 の交点の x 座標を γ, δ ($\delta > \gamma$) とおくと、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2}^0 (-x^2 - 2x) dx - \int_{\gamma}^{\delta} \{(-x^2 - 2x) - a(x+4)\} dx \\ &= \frac{1}{6}\{0 - (-2)\}^3 - \frac{1}{6}(\delta - \gamma)^3 = \frac{8 - (\sqrt{a^2 - 12a + 4})^3}{6} \end{aligned}$$

ここで、 $a^2 - 20a + 4 = f(a)$ とおくと、 $f(a)$ は $0 < a < \frac{1}{5}$ で単調減少であるから、

$S_1 = \frac{1}{6}(\sqrt{f(a)})^3$ も単調減少.

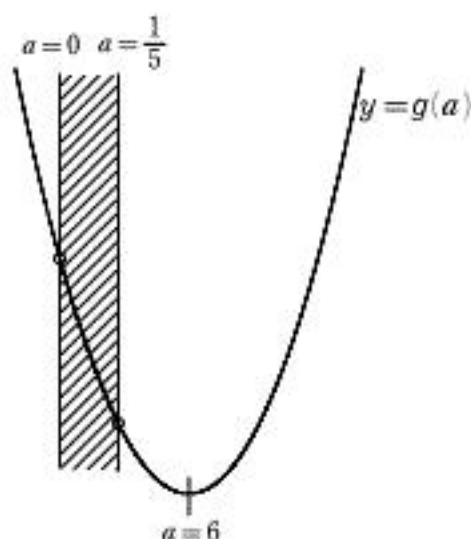
$f(0) = 4$, $f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{25}$ より、 S_1 は $\frac{4}{3}$ から $\frac{1}{750}$ まで単調に減少する.



また、 $a^2 - 12a + 4 = g(a)$ とおくと、 $g(a)$ は $0 < a < \frac{1}{5}$ で単調減少であるから、

$\frac{1}{6}(\sqrt{g(a)})^3$ も単調減少. したがって、 $S_2 = \frac{8 - (\sqrt{g(a)})^3}{6}$ は単調増加.

$g(0) = 4$, $g(\frac{1}{5}) = \frac{41}{25}$ より、 S_2 は 0 から $\frac{1000 - 41\sqrt{41}}{750}$ まで単調に増加する.



$\frac{1000 - 41\sqrt{41}}{750} > \frac{1}{750}$ より、 $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \frac{1}{5}$ の範囲に存在する. ■

[2]

(1)

$$y' = \frac{-1}{\{x(\log x)^2\}^2} \cdot \left\{ (\log x)^2 + x \cdot 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} \right\} = -\frac{\log x + 2}{x^2 (\log x)^3}$$

$x > 1$ のとき $\log x > 0$

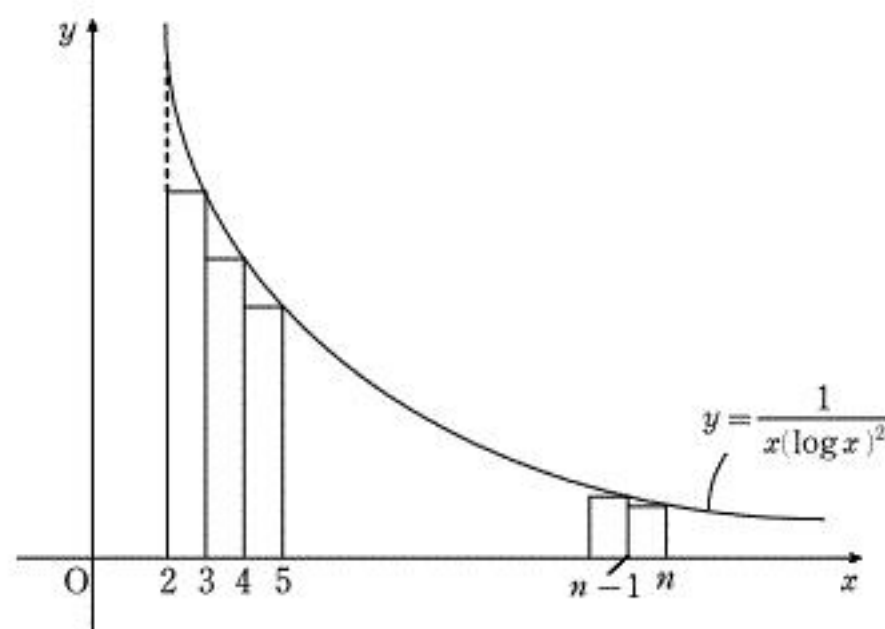
よって、 $y' < 0$ であるから、単調減少。 ■

x	0	...	e^{-2}	...	1	...
y'	/	-	0	+	/	-
y	/	↘		↗	/	↘

(2) $\log x = t$ とおく、 $\frac{1}{x} dx = dt$ より、

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\log x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots\dots \text{(答)}$$

(3)



$y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ のグラフと、その下に描かれた幅 1 の長方形の面積の和を考えれば、

$$\int_2^n \frac{1}{x(\log x)^2} dx > \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2}$$

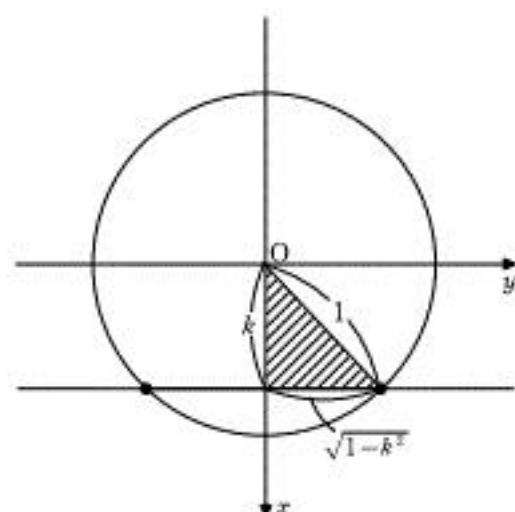
$$\text{ここで、} \int_2^n \frac{1}{x(\log x)^2} dx = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^n = -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log 2}$$

したがって、

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log 2} \quad \blacksquare$$

[3]

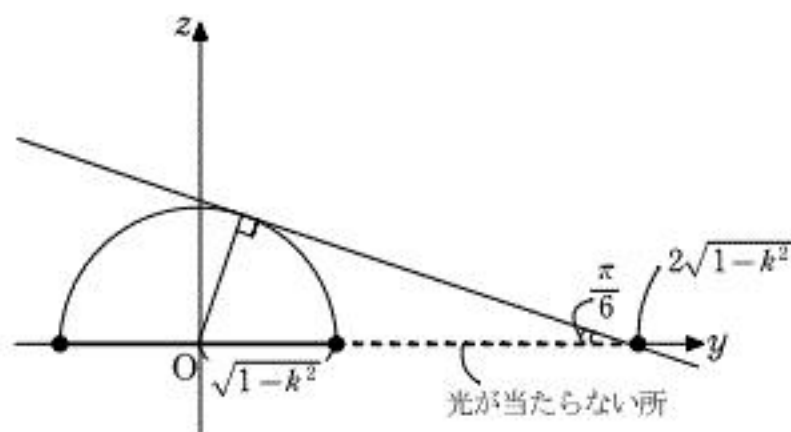
(1)



$x=k$ による球の断面を考えると、断面は中心 $(k, 0, 0)$ 、半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円となり、太陽光線の仰角が $\frac{\pi}{6}$ より、光が当たらない部分は

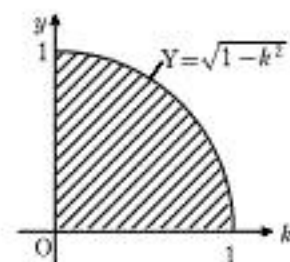
$$\sqrt{1-k^2} < y \leq 2\sqrt{1-k^2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

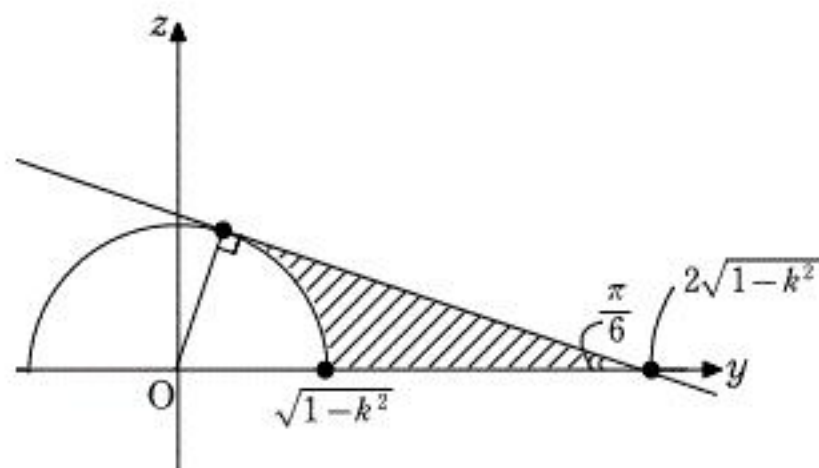


(1)より、対称性を利用して、

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 (2\sqrt{1-k^2} - \sqrt{1-k^2}) dk \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{1-k^2} dk \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$



(3)



$x=k$ による球の断面上では、光の当たらない部分の面積は、

$$\triangle - \triangle = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-k^2) - \frac{\pi}{6}(1-k^2)$$

よって、対称性を利用して、求める体積は

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-k^2) - \frac{\pi}{6}(1-k^2) \right\} dk \\ &= \left[\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) k - \frac{\sqrt{3}}{3} k^3 + \frac{\pi}{9} k^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{9} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

[4]

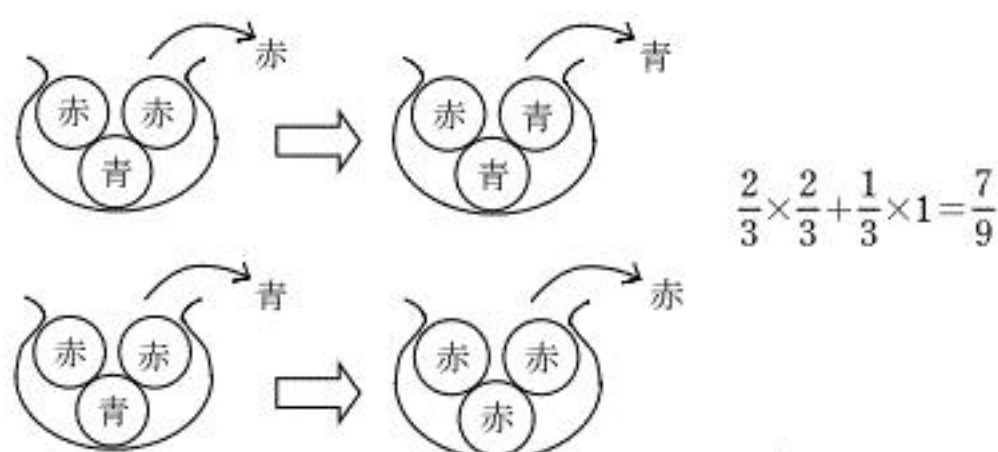
- (1) 2回目の操作で硬貨をもらうには、1回目、2回目ともに赤玉を取り出せばよいので、



- (2) はじめ（偶数回目）で偶数個の赤があり、1回につき赤の増減が必ず1あるので、赤玉の個数は奇数回目の操作で奇数個、偶数回目の操作で偶数個となる。

したがって、奇数回目の操作で赤玉が0個（偶数個）となることはない。 ■

- (3) 8回目の操作ではじめて硬貨をもらうには、
2, 4, 6回目に赤玉が2個、8回目に0個となればよい。
赤玉が2回の操作で2個から2個になる確率は、



赤玉が2回の操作で2個から0個になる確率は(1)より $\frac{2}{9}$

ゆえに、

$$\frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{686}{6561} \quad \dots\dots (\text{答})$$

- (4) 8回の操作でもらう硬貨の総数が1枚となるには、

2回目に赤玉が0個、4, 6, 8回目に2個

4回目に赤玉が0個、2, 6, 8回目に2個

6回目に赤玉が0個、2, 4, 8回目に2個

8回目に赤玉が0個、2, 4, 6回目に2個

となればよい。

赤玉が2回の操作で0個から2個になる確率は



したがって、

$$\frac{2}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} + \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{2450}{6561} \quad \dots\dots (\text{答})$$

[5]

(1) $n = 2m$ (m は自然数) のとき,

$$2^n - 1 = 2^{2m} - 1 = 4^m - 1 = (4 - 1)(4^{m-1} + 4^{m-2} + \dots + 4^0) = 3(4^{m-1} + 4^{m-2} + \dots + 4^0)$$

よって, $2^n - 1$ は 3 の倍数. ■

(2)

$$\begin{cases} 2^n + 1 = rM \\ 2^n - 1 = rN \end{cases} \quad (r, M, N \text{ は自然数で } r \geq 2) \text{ とおく.}$$

$$2^n + 1 > 2^n - 1 \text{ より } rM > rN \quad \text{すなわち } M > N$$

$$(2^n + 1) - (2^n - 1) = r(M - N) \text{ より,}$$

$$2 = r(M - N)$$

$r \geq 2, M - N \geq 1$ より, $r = 2, M - N = 1$ となるが, $2^n + 1, 2^n - 1$ はともに奇数であるから,

$2^n + 1 = 2M, 2^n - 1 = 2N$ とは表せない. よって 2 数は互いに素. ■

(3) p が偶数のとき, $2^{p-1} - 1$ は奇数であり, pq^2 は偶数であるから $2^{p-1} - 1 \neq pq^2$
 p 奇数のとき, p は素数より $p \geq 3$ であるから, $p = 2m + 1$ (m は自然数) とおくと,

$$2^{2m} - 1 = (2m + 1)q^2$$

$$3(4^{m-1} + 4^{m-2} + \dots + 4^0) = (2m + 1)q^2$$

左辺は 3 の倍数より, 右辺も 3 の倍数. よって, $m = 1$ または $q = 3$

$m = 1$ のとき, $3 = 3q^2$ ゆえに $q = 1$ これは q が素数であることに矛盾.

したがって, $m \neq 1$

$q = 3$ のとき,

$$2^{2m} - 1 = (2m + 1) \cdot 3^2$$

$$(2^m + 1)(2^m - 1) = (2m + 1) \cdot 3^2$$

(2) より, $2^m + 1, 2^m - 1$ は互いに素であるから, $m > 1$ と $2^m - 1 > 1$ に注意して,

$$(2^m + 1, 2^m - 1) = (2m + 1, 3^2), (3^2, 2m + 1)$$

$$\begin{cases} 2^m + 1 = 2m + 1 \\ 2^m - 1 = 3^2 \end{cases} \quad \text{のとき, } m \text{ は自然数とならない.}$$

$$\begin{cases} 2^m + 1 = 3^2 \\ 2^m - 1 = 2m + 1 \end{cases} \quad \text{のとき, } m = 3 \quad \text{このとき, } p = 2m + 1 = 7$$

以上より, $(p, q) = (7, 3)$ (答)