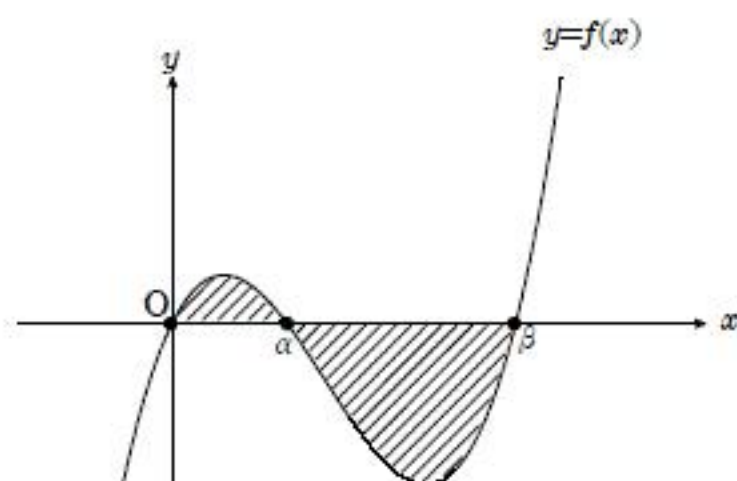


[1]

条件より, $x^3 + ax^2 + bx = x(x - \alpha)(x - \beta)$ と変形できる.

$f(x) = x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x$ とおく.

(1)



$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} \{0 - f(x)\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{\alpha + \beta}{3}x^3 + \frac{\alpha\beta}{2}x^2 \right]_0^{\alpha} - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{\alpha + \beta}{3}x^3 + \frac{\alpha\beta}{2}x^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{4}\alpha^4 - \frac{\alpha + \beta}{3}\alpha^3 + \frac{\alpha\beta}{2}\alpha^2 \right) - \left(\frac{1}{4}\beta^4 - \frac{\alpha + \beta}{3}\beta^3 + \frac{\alpha\beta}{2}\beta^2 \right) \\
 &= -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^3\beta - \frac{1}{6}\alpha\beta^3 + \frac{1}{12}\beta^4 \quad \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) $S(\alpha) = -\frac{1}{6}\alpha^4 + \frac{\beta}{3}\alpha^3 - \frac{\beta^3}{6}\alpha + \frac{\beta^4}{12}$ とおく.

$$S'(\alpha) = -\frac{2}{3}\alpha^3 + \beta\alpha^2 - \frac{\beta^3}{6} = -\frac{1}{6}(4\alpha^3 - 6\beta\alpha^2 + \beta^3) = -\frac{1}{6}(2\alpha - \beta)(2\alpha^2 - 2\beta\alpha - \beta^2)$$

$$S'(\alpha) = 0 \text{ のとき, } \alpha = \frac{\beta}{2}, \frac{\beta \pm \sqrt{3}\beta}{2}$$

α	0	...	$\frac{\beta}{2}$	...	β
$S'(\alpha)$		-	0	+	
$S(\alpha)$			$\searrow$		$\nearrow$

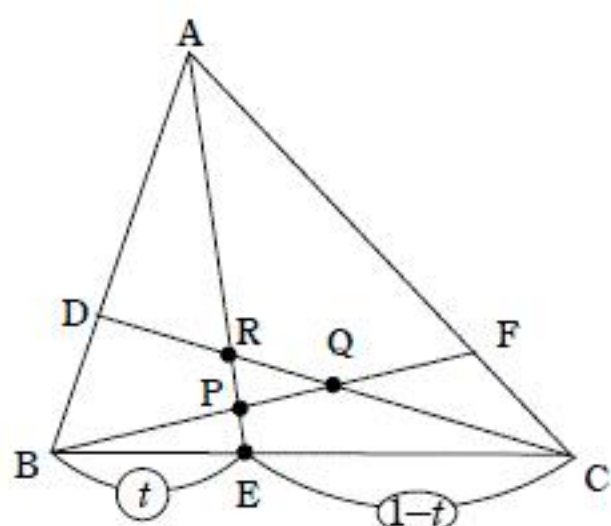
増減表より, $0 < \alpha < \beta$ で $S(\alpha)$ が最小となるのは

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

のときである.

[2]

(1)



$DQ:QC = u:(1-u)$, $BQ:QF = v:(1-v)$ とおくと,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AQ} = (1-u)\overrightarrow{AD} + u\overrightarrow{AC} = (1-u) \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AQ} = (1-v)\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AF} = (1-v)\overrightarrow{AB} + v \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

と2通りに表せ, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は1次独立ゆえ,

$$\begin{cases} (1-u) \cdot \frac{2}{3} = 1-v \\ u = v \cdot \frac{3}{4} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{2}{3} \end{cases}$$

よって, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$P=Q=R$ のとき, AQ と BC の交点が E となる. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ より,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AQ} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

一方, $\overrightarrow{AE} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ でもあるから,

$$t = \frac{3}{5} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$\overrightarrow{AE} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t \cdot \frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$ であり, $1-t+t \cdot \frac{4}{3} = 1 + \frac{t}{3}$ より,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1+\frac{t}{3}}\overrightarrow{AE} = \frac{3}{3+t}\overrightarrow{AE} \quad \therefore k = \frac{3}{3+t} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{1-t}\overrightarrow{CE}$ であり, $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{3-t}{3-3t}$ より,

$$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{\frac{3-t}{3-3t}}\overrightarrow{CD} = \frac{3-3t}{3-t}\overrightarrow{CD} \quad \therefore l = \frac{3-3t}{3-t} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3)

$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 2\overrightarrow{CQ} \text{ より, } Q \text{ は } CD \text{ の中点.}$$

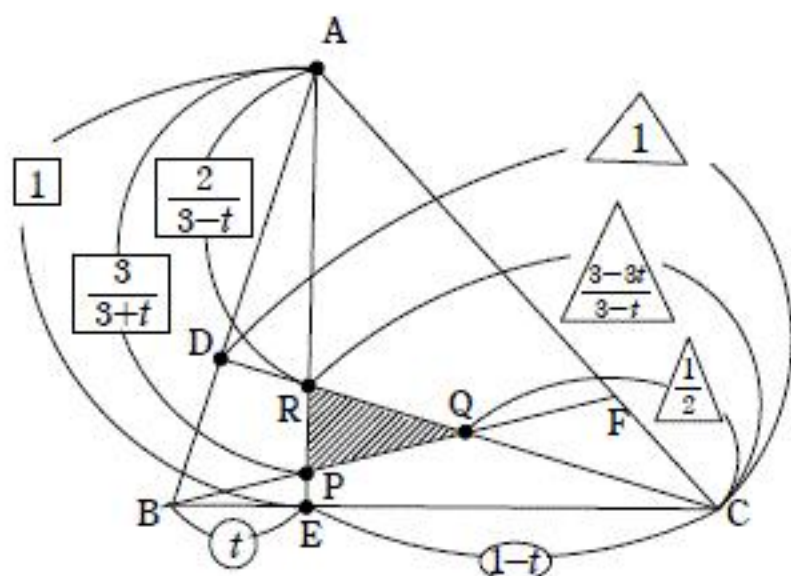
$$\therefore \triangle BCQ = \triangle BCD \times \frac{1}{2} = \triangle ABC \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \dots\dots (\text{答})$$

また,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AC} + \frac{3-3t}{3-t}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{3-3t}{3-t}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2-2t}{3-t}\overrightarrow{AB} + \frac{2t}{3-t}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{3-t}\{(1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\} = \frac{2}{3-t}\overrightarrow{AE} \end{aligned}$$

$$\text{より, } \overrightarrow{AR} = \frac{2}{3-t}\overrightarrow{AE}$$

$$t < \frac{3}{5} \text{ より, } \frac{2}{3-t} < \frac{3}{3+t}$$



$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \triangle AEC \times \frac{RP}{AE} \times \frac{RQ}{CR} \\ &= (1-t) \times \left(\frac{3}{3+t} - \frac{2}{3-t}\right) \times \frac{\frac{3-3t}{3-t} - \frac{1}{2}}{\frac{3-3t}{3-t}} \\ &= \frac{(3-5t)^2}{6(3+t)(3-t)} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

赤玉, 青玉, 白玉を取り出したときに行う移動をそれぞれ R, B, W とする.

$$R \text{ を行う確率は } \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, B \text{ を行う確率は } \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, W \text{ 行う確率は } \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

現在コインが $x+y=m$ 上にあるとする.

R, B を行ったとき, どちらもコインは $x+y=m+1$ 上に移動し, W を行ったとき, コインは $x+y=m-2$ 上に移動する.

- (1) W を 1 回, R と B を合わせて $n-1$ 回行ったとき, コインは直線 $x+y=n-3$ 上にあり, (R, B) の回数が異なればコインの位置も異なるので, R を 0 回, 1 回, $\dots$, $n-1$ 回行ったときを考えて,

$$(-1, n-2), (0, n-3), \dots, (n-2, -1) \dots \dots (\text{答})$$

- (2) W を k 回, R と B を合わせて $n-k$ 回行ったとき, コインは直線 $x+y=n-k-2k$ すなわち, $x+y=n-3k$ 上にあり, k が異なるとき, コインは同一直線上の点に到達することはない.

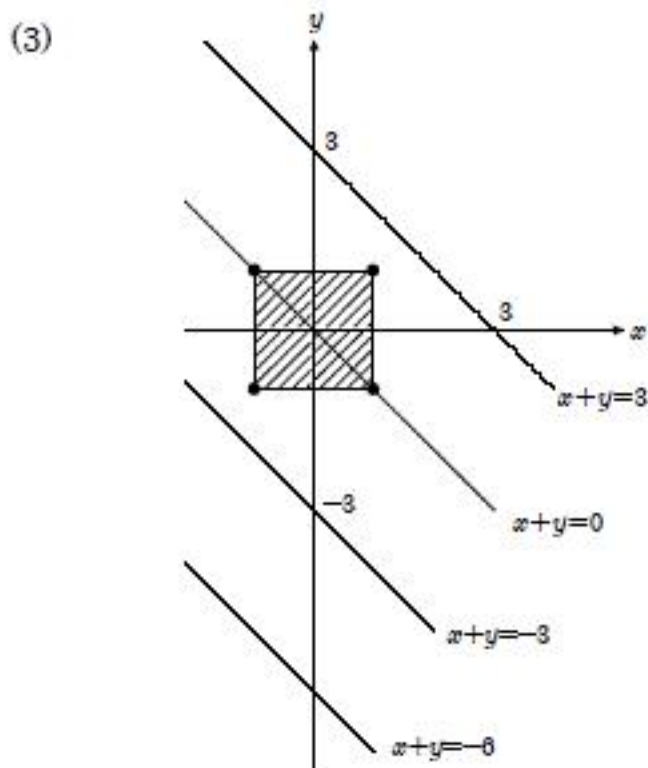
さらに, $x+y=n-3k$ 上で, (R, B) の回数が異なればコインの位置も異なるので, R を 0 回, 1 回, $\dots$, $n-k$ 回行ったときを考えて,

$$(-k, n-2k), (-k+1, n-2k-1), (-k+2, n-2k-2), \dots, (n-2k, -k)$$

の $n-k+1$ 個の到達点が存在する.

よって, 求める個数は,

$$\sum_{k=0}^n (n-k+1) = (n+1) + n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \dots \dots (\text{答})$$



$n=3$ とする. 到達点は,

W を 0 回行ったとき, $x+y=3$ 上にあり,
 1 回行ったとき, $x+y=0$ 上にあり,
 2 回行ったとき, $x+y=-3$ 上にあり,
 3 回行ったとき, $x+y=-6$ 上にある.

よって, W は 1 回行われ,

$(R, B) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$ の回数するとき,

到達点はそれぞれ

$$(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$$

であるから, すべて D 上にある.

以上より,

$$\begin{aligned} P_3 &= (W \text{ を 1 回だけ行う確率}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot {}_3C_1 = \frac{25}{72} \dots \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

- (4) コインが D の内部または辺上にあるには, 直線 $x+y=-2, -1, 0, 1, 2$ のどれかの上にあることが必要で, W を k 回行ったとき, $x+y=3N-3k$ 上にあることから,

$$-2 \leq 3N-3k \leq 2$$

が必要となる.

$$\therefore N - \frac{2}{3} \leq k \leq N + \frac{2}{3}$$

k は整数ゆえ, $k=N$ このとき, コインは $x+y=0$ 上にあり, $(-1, 1), (0, 0)$

$(-1, 1)$ 上にあるときの R, B の回数はそれぞれ $(N-1, N+1), (N, N), (N+1, N-1)$

よって,

$$\begin{aligned} P_{3N} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^N \cdot \frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!} + \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^N \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^N \cdot \frac{(3N)!}{N!N!N!} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^N \cdot \frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^N \cdot \frac{(3N)!}{N!N!(N-1)!} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{N+1} \right\} \\ &= \frac{(19N+6) \cdot (3N)!}{2^N 3^N 6^{N+1} N! N! (N+1)!} \dots \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

[4]

(1) $10^n = 13p_n + a_n$ (n は自然数, a_n は 0 から 12 までの整数) とおくと,

$$10^{n+1} = 10(13p_n + a_n) = 13 \cdot 10p_n + 10a_n$$

ここで, $10a_n = 13q + r$ (q は整数, r は 0 から 12 までの整数) とおくと,

$$10^{n+1} = 13 \cdot 10p_n + 13q + r = 13(10p_n + q) + r$$

よって, $p_{n+1} = 10p_n + q$, $a_{n+1} = r$ となるので, a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しい.

(2)

$$10^1 = 13 \cdot 0 + 10$$

$$10^2 = 13 \cdot 7 + 9$$

$$10^3 = 13 \cdot 70 + 90 = 13 \cdot 70 + 13 \cdot 6 + 12$$

$$10^4 = 13 \cdot 700 + 13 \cdot 60 + 120 = 13 \cdot 700 + 13 \cdot 60 + 13 \cdot 9 + 3$$

$$10^5 = 13 \cdot 7000 + 13 \cdot 600 + 13 \cdot 90 + 30 = 13 \cdot 7000 + 13 \cdot 600 + 13 \cdot 90 + 13 \cdot 2 + 4$$

$$10^6 = 13 \cdot 70000 + 13 \cdot 6000 + 13 \cdot 900 + 13 \cdot 20 + 40 = 13 \cdot 70000 + 13 \cdot 6000 + 13 \cdot 900 + 13 \cdot 20 + 13 \cdot 3 + 1$$

よって, $a_1 = 10, a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1$ (答)

(3) $N = A \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + B$ (A, B は 0 から 9 までの整数, $A \neq 0$) とおく.

$$\begin{aligned} N &= A \times (13 \cdot 7692 + 4) + 2 \times (13 \cdot 769 + 3) + 1 \times (13 \cdot 7 + 9) + 6 \times 10 + B \\ &= 13(7692A + 769 \times 2 + 7) + 4A + 6 + 9 + 60 + B \\ &= 13(7692A + 769 \times 2 + 7 + 5) + 4A + B + 10 \end{aligned}$$

N が 13 で割り切れるとき, $4A + B + 10$ も 13 で割り切れ, $14 \leq 4A + B + 10 \leq 55$ より,
 $4A + B + 10 = 26, 39, 52$ $4A + B = 16, 29, 42$

$$\therefore (A, B) = (2, 8), (3, 4), (4, 0), (5, 9), (6, 5), (7, 1), (9, 6)$$

よって,

$$N = 220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166 \quad \text{..... (答)}$$