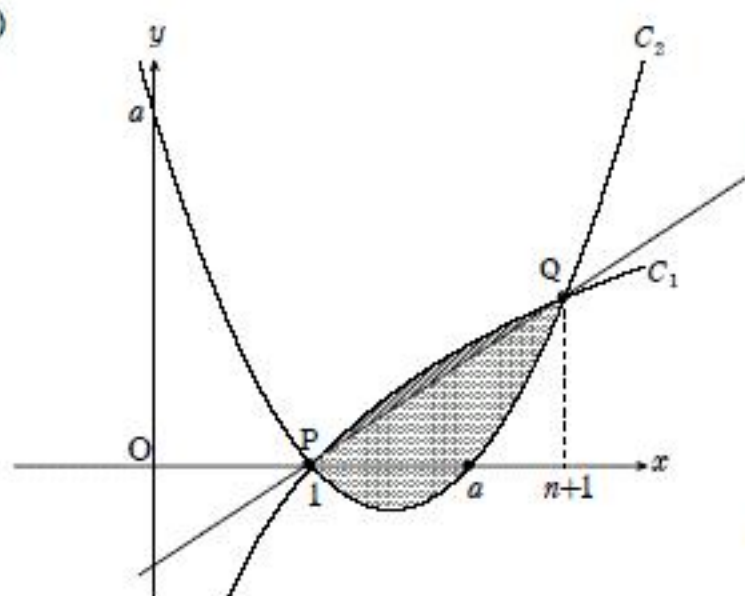


[1]

(1)

Q は, C_1 上にあるので, $Q(n+1, \log n+1)$ C_2 上にもあるので, $Q(n+1, n+1-a)$

$$\therefore \log n+1 = n+1-a$$

$$\frac{\log n+1}{n} = n+1-a$$

$$a = n+1 - \frac{\log n+1}{n} \dots\dots \text{答}$$

 $f(x) = x^2 - \log x + 1$ とおく.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x+1}$$

x	1	...
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\log e - \log 2$	↗

 $x \geq 1$ のとき, $f'(x) > 0$ より, $f(x)$ は $x \geq 1$ で単調増加. $f(1) = 1 - \log 2 = \log e - \log 2 > 0$ であるから, $x \geq 1$ のとき, $f(x) > 0$

$$\therefore x^2 > \log x + 1$$

$$x > \frac{\log x + 1}{x}$$

$$x - \frac{\log x + 1}{x} > 0$$

$$x+1 - \frac{\log x + 1}{x} > 1$$

したがって, $n \geq 1$ で, $a > 1$ □

$$(2) \quad PQ: y = \frac{\log n+1}{n} (x-1) \text{ より,}$$

$$S_n = \int_1^{n+1} \left\{ \log x - \frac{\log n+1}{n} (x-1) \right\} dx = \left[x \log x - x - \frac{\log n+1}{2n} (x-1)^2 \right]_1^{n+1}$$

$$= (n+1) \log n+1 - (n+1) - \frac{n \log n+1}{2} + 1 = \frac{n+2}{2} \log n+1 - n \dots\dots \text{(答)}$$

$$T_n = \int_1^{n+1} \left\{ \frac{\log n+1}{n} (x-1) - (x-1)(x-a) \right\} dx = \frac{1}{6} (n+1-1)^3 = \frac{n^3}{6} \dots\dots \text{(答)}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{2} \log n+1 - n}{n \log \frac{n^3}{6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{2n} \log n+1 - 1}{\log \frac{n^3}{6}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{n+2}{2n} \log n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{3 \log n - \log 6} - \frac{1}{\log \frac{n^3}{6}} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{n+2}{2n} \left\{ \log n + \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\}}{3 \left(\log n - \frac{1}{3} \log 6 \right)} - \frac{1}{\log \frac{n^3}{6}} \right]$$

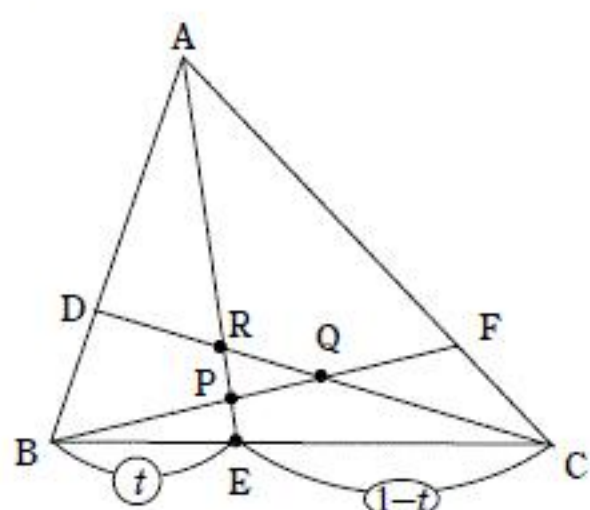
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+2}{6n} \cdot \frac{1 + \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\log n}}{1 - \frac{\log 6}{3 \log n}} - \frac{1}{\log \frac{n^3}{6}} \right]$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{n+2}{6n} \rightarrow \frac{1}{6}$, $\log n \rightarrow \infty$, $\log \frac{n^3}{6} \rightarrow \infty$, $\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rightarrow \log 1 = 0$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+0}{1-0} - 0 = \frac{1}{6} \dots\dots \text{(答)}$$

[2]

(1)



$DQ:QC = u:1-u$, $BQ:QF = v:1-v$ とおくと,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AQ} = 1-u \overrightarrow{AD} + u \overrightarrow{AC} = 1-u \cdot \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + u \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AQ} = 1-v \overrightarrow{AB} + v \overrightarrow{AF} = 1-v \overrightarrow{AB} + v \cdot \frac{3}{4} \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

と2通りに表せ, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は1次独立ゆえ,

$$\begin{cases} 1-u \cdot \frac{2}{3} = 1-v \\ u = v \cdot \frac{3}{4} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{2}{3} \end{cases}$$

よって, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$

$P=Q=R$ のとき, AQ と BC の交点が E となる. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ より,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AQ} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AC}$$

一方, $\overrightarrow{AE} = 1-t \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC}$ でもあるから,

$$t = \frac{3}{5} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2)

$\overrightarrow{AE} = 1-t \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC} = 1-t \overrightarrow{AB} + t \cdot \frac{4}{3} \overrightarrow{AF}$ であり, $1-t+t \cdot \frac{4}{3} = 1 + \frac{t}{3}$ より,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1+\frac{t}{3}} \overrightarrow{AE} = \frac{3}{3+t} \overrightarrow{AE} \quad \therefore k = \frac{3}{3+t} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{CB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{1-t} \overrightarrow{CE}$ であり, $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{3-t}{3-3t}$ より,

$$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{\frac{3-t}{3-3t}} \overrightarrow{CD} = \frac{3-3t}{3-t} \overrightarrow{CD} \quad \therefore l = \frac{3-3t}{3-t} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3)

$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 2 \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) = 2 \overrightarrow{CQ}$ より, Q は CD の中点.

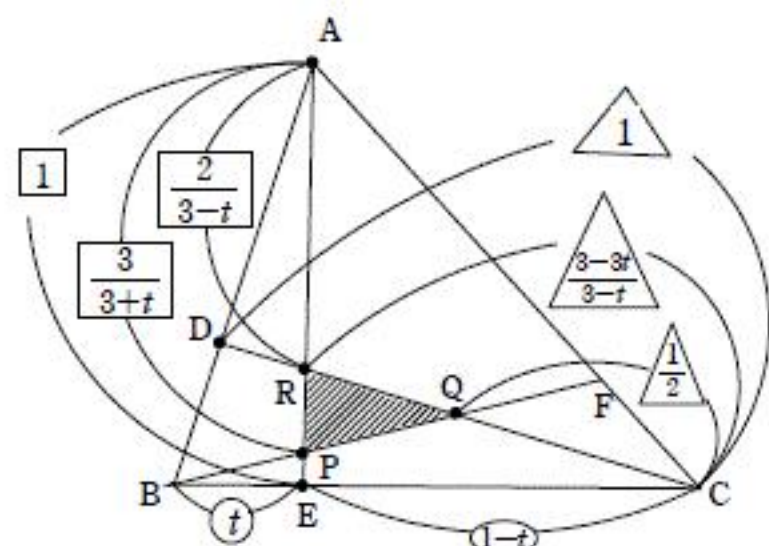
$$\therefore \triangle BCQ = \triangle BCD \times \frac{1}{2} = \triangle ABC \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(4)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AC} + \frac{3-3t}{3-t} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{3-3t}{3-t} \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right) = \frac{2-2t}{3-t} \overrightarrow{AB} + \frac{2t}{3-t} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{3-t} (1-t \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3-t} \overrightarrow{AE} \end{aligned}$$

$$\text{より, } AR = \frac{2}{3-t} AE$$

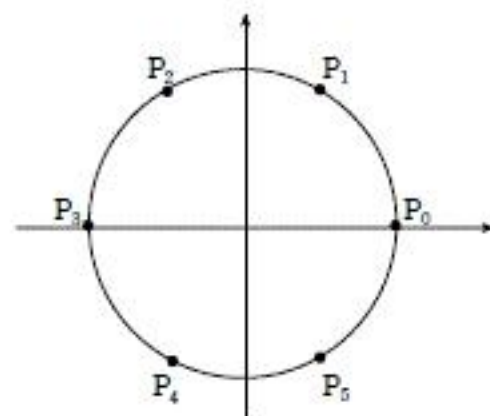
$$t < \frac{3}{5} \text{ より, } \frac{2}{3-t} < \frac{3}{3+t}$$



$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \triangle AEC \times \frac{RP}{AE} \times \frac{RQ}{CR} \\ &= 1-t \times \left(\frac{3}{3+t} - \frac{2}{3-t} \right) \times \frac{\frac{3-3t}{3-t} - \frac{1}{2}}{\frac{3-3t}{3-t}} \\ &= \frac{3-5t^2}{6(3+t)(3-t)} \quad \dots\dots \text{答} \end{aligned}$$

[3]

(1)



1回目	1回後の位置	2回目	2回後の位置
1	P_1	5	P_0
2	P_2	4	P_0
3	P_3	3	P_0
4	P_4	2	P_0
5	P_5	1	P_0
6	P_0	6	P_0

以上より, $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ …… (答)

(2) 2回で P_1 から P_0 に移動するには,

1, 4, 2, 3, 3, 2, 4, 1, 5, 6, 6, 1 の6通り

同様に, 2回で P_2, P_3, P_4, P_5 から P_0 に移動するには,それぞれ,

1, 3, 2, 2, 3, 1, 4, 6, 5, 5, 6, 2 の6通り

1, 2, 2, 1, 3, 6, 4, 5, 5, 4, 6, 3 の6通り

1, 1, 2, 6, 3, 5, 4, 4, 5, 3, 6, 4 の6通り

1, 6, 2, 5, 3, 4, 4, 3, 5, 2, 6, 5 の6通り

よって, $\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{36} \times 6 = \frac{1}{6}$ …… (答)

(3) n 回後の位置が P_0 である確率を, p_n とおく.

n 回後の位置が P_1 のとき, 次に P_0 に移動するには5の目が出ればよいので確率は $\frac{1}{6}$

n 回後の位置が P_2 のとき, 次に P_0 に移動するには4の目が出ればよいので確率は $\frac{1}{6}$

n 回後の位置が P_3 のとき, 次に P_0 に移動するには3の目が出ればよいので確率は $\frac{1}{6}$

n 回後の位置が P_4 のとき, 次に P_0 に移動するには2の目が出ればよいので確率は $\frac{1}{6}$

n 回後の位置が P_5 のとき, 次に P_0 に移動するには1の目が出ればよいので確率は $\frac{1}{6}$

n 回後の位置が P_0 のとき, 次に P_0 に移動するには6の目が出ればよいので確率は $\frac{1}{6}$

よって, $p_{n+1} = \frac{1}{6} (1 - p_n) + \frac{1}{6} p_n = \frac{1}{6}$

したがって, $p_n = \frac{1}{6}$ (一定) …… (答)

[4]

(1) $10^n = 13p_n + a_n$ (n は自然数, a_n は 0 から 12 までの整数) とおくと,

$$10^{n+1} = 10 \cdot 13p_n + a_n = 13 \cdot 10p_n + 10a_n$$

ここで, $10a_n = 13q + r$ (q は整数, r は 0 から 12 までの整数) とおくと,

$$10^{n+1} = 13 \cdot 10p_n + 13q + r = 13 \cdot 10p_n + q + r$$

よって, $p_{n+1} = 10p_n + q$, $a_{n+1} = r$ となるので, a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しい.

(2)

$$10^1 = 13 \cdot 0 + 10$$

$$10^2 = 13 \cdot 7 + 9$$

$$10^3 = 13 \cdot 70 + 90 = 13 \cdot 70 + 13 \cdot 6 + 12$$

$$10^4 = 13 \cdot 700 + 13 \cdot 60 + 120 = 13 \cdot 700 + 13 \cdot 60 + 13 \cdot 9 + 3$$

$$10^5 = 13 \cdot 7000 + 13 \cdot 600 + 13 \cdot 90 + 30 = 13 \cdot 7000 + 13 \cdot 600 + 13 \cdot 90 + 13 \cdot 2 + 4$$

$$10^6 = 13 \cdot 70000 + 13 \cdot 6000 + 13 \cdot 900 + 13 \cdot 20 + 40 = 13 \cdot 70000 + 13 \cdot 6000 + 13 \cdot 900 + 13 \cdot 20 + 13 \cdot 3 + 1$$

よって, $a_1 = 10, a_2 = 9, a_3 = 12, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 1 \dots\dots$ (答)

(3) $N = A \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + B$ (A, B は 0 から 9 までの整数, $A \neq 0$) とおく.

$$\begin{aligned} N &= A \times 13 \cdot 7692 + 4 + 2 \times 13 \cdot 769 + 3 + 1 \times 13 \cdot 7 + 9 + 6 \times 10 + B \\ &= 13 \cdot 7692A + 769 \times 2 + 7 + 4A + 6 + 9 + 60 + B \\ &= 13 \cdot 7692A + 769 \times 2 + 7 + 5 + 4A + B + 10 \end{aligned}$$

N が 13 で割り切れるとき, $4A + B + 10$ も 13 で割り切れ, $14 \leq 4A + B + 10 \leq 55$ より,

$$4A + B + 10 = 26, 39, 52 \quad 4A + B = 16, 29, 42$$

$$\therefore A, B = 2, 8, 3, 4, 4, 0, 5, 9, 6, 5, 7, 1, 9, 6$$

よって,

$$N = 220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166 \dots\dots$$
 (答)

[5]

(1) ド・モアブルの定理より,

$$z^n = \cos \theta + i \sin \theta \quad^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

よって,

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i \sin n\theta} = \frac{1}{\cos n\theta + i \sin n\theta} \cdot \frac{\cos n\theta - i \sin n\theta}{\cos n\theta - i \sin n\theta} = \frac{\cos n\theta - i \sin n\theta}{\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos n\theta = \cos n\theta, \quad -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right) = -\frac{i}{2} \cdot 2i \sin n\theta = \sin n\theta \quad \text{証明終}$$

(2) $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ より,

$$\cos x + 2\cos^2 x - 1 - 4\cos^3 x - 3\cos x = 1$$

$$4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 4\cos x + 2 = 0$$

$$2 \cos x + 1 \quad \cos x - 1 \quad 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \pm 1, \frac{1}{2} \quad x = 0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \dots\dots \text{答}$$

(3)

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ$$

$$= \frac{1 - \cos 40^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 80^\circ}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1 - \cos 160^\circ}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 180^\circ - 20^\circ}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ - \cos 20^\circ}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 50^\circ + 30^\circ - \cos 50^\circ - 30^\circ}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ - 2 \sin 50^\circ \sin 30^\circ}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ - \sin 50^\circ}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ - \sin (90^\circ - 40^\circ)}{2}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{\cos 40^\circ - \cos 40^\circ}{2}$$

$$= \frac{9}{4}$$

〔証明終〕