

[1]

(1) C_1 上の $x=p$ における接線の方程式は、 $y'=4x$ より、

$$\begin{aligned} y &= 4p(x-p) + 2p^2 + 1 \\ &= 4px - 2p^2 + 1 \end{aligned}$$

これと C_2 が接するときを考える、

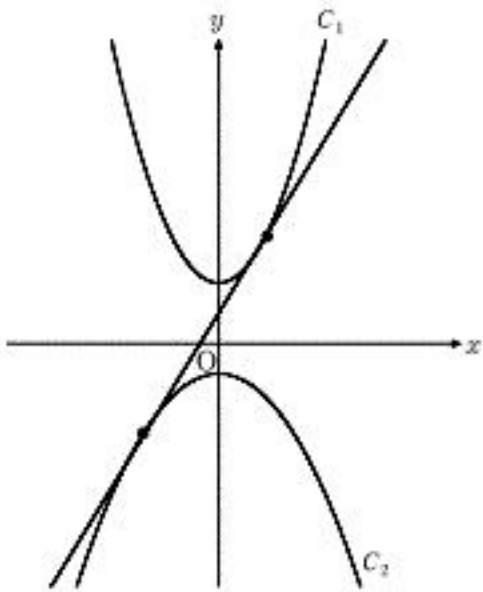
$$\begin{aligned} 4px - 2p^2 + 1 &= -x^2 + a \quad \text{すなわち} \\ x^2 + 4px - 2p^2 + 1 - a &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が重解をもてばよいので、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (2p)^2 - (-2p^2 + 1 - a) = 6p^2 - 1 + a = 0 \\ p^2 &= \frac{1-a}{6} \\ \therefore p &= \pm \sqrt{\frac{1-a}{6}} \end{aligned}$$

このとき、接線の方程式は、

$$y = 4 \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{1-a}{6}} \right) x - 2 \cdot \frac{1-a}{6} + 1 = \pm \frac{2\sqrt{6}\sqrt{1-a}}{3} x + \frac{a+2}{3} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



(2) $p = \sqrt{\frac{1-a}{6}}$ のとき、接線の方程式は、

$$y = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{1-a}}{3} x + \frac{a+2}{3}$$

y 軸に関して対称であることを利用して、

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{1-a}{6}}} \left\{ (2x^2 + 1) - \left(\frac{2\sqrt{6}\sqrt{1-a}}{3} x + \frac{a+2}{3} \right) \right\} dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\frac{1-a}{6}}} 2 \left(x - \sqrt{\frac{1-a}{6}} \right)^2 dx \\ &= \frac{4}{3} \left[\left(x - \sqrt{\frac{1-a}{6}} \right)^3 \right]_0^{\sqrt{\frac{1-a}{6}}} \\ &= \frac{4}{3} \left(\sqrt{\frac{1-a}{6}} \right)^3 \end{aligned}$$

また、このとき $\textcircled{1}$ の解は、 $x = -2p = -2\sqrt{\frac{1-a}{6}}$ となるので、 C_2 と接線の接点の

x 座標は $-2\sqrt{\frac{1-a}{6}}$ とわかる。

よって、 y 軸に関して対称であることを利用して、

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \int_{-2\sqrt{\frac{1-a}{6}}}^0 \left\{ \left(\frac{2\sqrt{6}\sqrt{1-a}}{3} x + \frac{a+2}{3} \right) - (-x^2 + a) \right\} dx \\ &= 2 \int_{-2\sqrt{\frac{1-a}{6}}}^0 \left(x + 2\sqrt{\frac{1-a}{6}} \right)^2 dx \\ &= \frac{2}{3} \left[\left(x + 2\sqrt{\frac{1-a}{6}} \right)^3 \right]_{-2\sqrt{\frac{1-a}{6}}}^0 \\ &= \frac{16}{3} \left(\sqrt{\frac{1-a}{6}} \right)^3 \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{S_2}{S_1} = 4 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

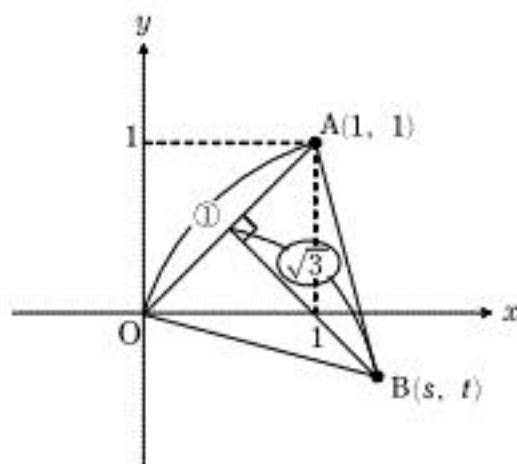
[2]

(1) $\overrightarrow{\text{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直なベクトルで、大きさが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍のものは $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

よって、

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \\ \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore (s, t) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}}{2} \right) \text{ (複号同順) } \cdots \cdots \text{(答)}$$



(2) $\sqrt{3} = \frac{q}{p}$ (p と q は互いに素な自然数) とおくと,

$$\sqrt{3}p = q$$

辺々2乗して、

$$3p^2 = q^2$$

左辺は3の倍数であるから、右辺も3の倍数、よって、 q は3の倍数となるから、

$q=3m$ (m は自然数) とおける. このとき,

$$3p^2 = (3m)^2 \quad \therefore p^2 = 3m^2$$

右辺は3の倍数であるから、左辺も3の倍数. よって、 p は3の倍数.

これは p と q が互いに素であることに反する.

以上より,

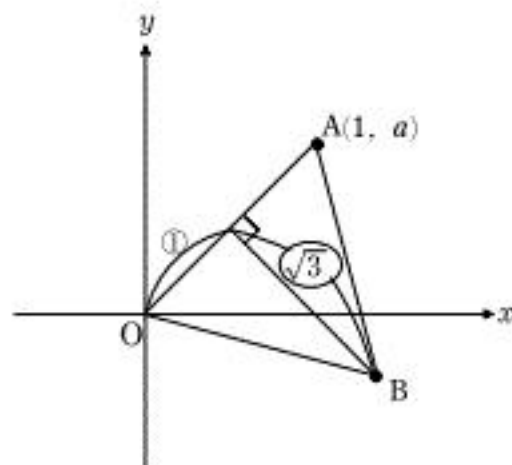
$\sqrt{3}$ は無理数 $\square$

(3) $\overrightarrow{OA}$ に垂直なベクトルで、大きさが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍のものは $\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$

よって、

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{3}a}{2} \\ \frac{a \mp \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore (s, t) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}a}{2}, \frac{a \mp \sqrt{3}}{2} \right) \text{ (複号同順) } \cdots \cdots \text{(答)}$$



a は有理数であり, (2)より, $\sqrt{3}$ は無理数であるので, $\frac{a \pm \sqrt{3}}{2}$ は必ず無理数となる.

したがって、 t は常に無理数である。

よって、 s, t のうち少なくとも1つは無理数である。

[3] さいころを1回投げて、3以上の目が出る確率は、 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

1または2の目が出る確率は、 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(1) n 回目までに1または2の目が出ればよいので、

$$p_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdots \cdots (\text{答})$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0.005 \text{ のとき, } \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{1}{200}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^n &\leq \log_{10} \frac{1}{200} \\ -n \log_{10} 3 &\leq -(\log_{10} 2 + \log_{10} 10^2) \\ 0.301 + 2 &\leq 0.477n \\ n &\geq \frac{2.301}{0.477} = 4.8 \cdots \cdots \end{aligned}$$

より、最小の n は5 $\cdots \cdots (\text{答})$

(2) 1回目でAが勝つ確率は $\frac{2}{3}$

2回目はBがさいころを投げるので、Aが勝つことはない。

3回目で、Aが勝つのは、1、2回目に1または2の目が出て、3回目に3以上の目が出たときで、その確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

よって、3回以下でAが勝つ確率は

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{27} = \frac{20}{27} \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) Aが勝つのは奇数回目のときであり、

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{回目でAが勝つのは、1回目に3以上の目が、} \\ 3 \text{回目にAが勝つのは、2回目まで1または2の目が出て、3回目に3以上の目が、} \\ 5 \text{回目にAが勝つのは、4回目まで1または2の目が出て、5回目に3以上の目が、} \\ \vdots \\ 2k+1 \text{回目にAが勝つのは、} 2k \text{回目まで1または2の目が出て、} 2k+1 \text{回目に3以上の目が} \end{array} \right.$
それぞれ出たときであり、その確率は、

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + \cdots \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \cdots \cdots + \left(\frac{1}{9}\right)^k \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であり、これは、初項 $\frac{2}{3}$ 、公比 $\frac{1}{9}$ 、項数 $k+1$ の等比数列の和であるから、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{9}} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{\frac{8}{9}} \\ &= \frac{3}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{k+1} \right] \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

[4]

(1) ユークリッドの互除法を利用する.

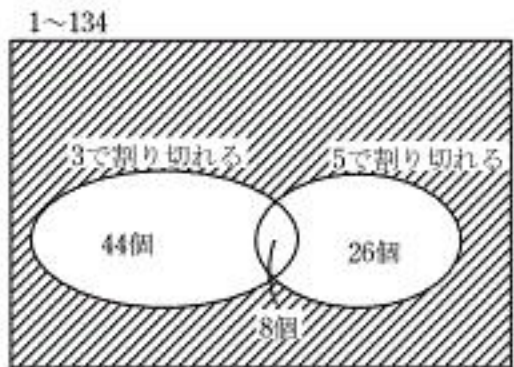
$$\begin{aligned} 2017 \div 225 &= 8 \quad \text{あまり} \quad 217 \\ 225 \div 217 &= 1 \quad \text{あまり} \quad 8 \\ 217 \div 8 &= 27 \quad \text{あまり} \quad 1 \\ 8 \div 1 &= 8 \quad \text{あまり} \quad 0 \end{aligned}$$

よって、2017 と 225 の最大公約数は、1 ……(答)

(2) $225 = 3^2 \cdot 5^2$ であるから、225 との最大公約数が 15 となる自然数は、3 と 5 を 1 つずつだけ因数にもつ自然数.

$$\begin{aligned} 2017 \div 15 &= 134 \text{ あまり } 7 \text{ より, } 1 \text{ から } 134 \text{ の中で } 3 \text{ でも } 5 \text{ でも割り切れない整数の個数を考えればよい.} \\ 134 \div 3 &= 44 \text{ あまり } 2 \text{ より, } 3 \text{ で割り切れるものは } 44 \text{ 個} \\ 134 \div 5 &= 26 \text{ あまり } 4 \text{ より, } 5 \text{ で割り切れるものは } 26 \text{ 個} \\ 134 \div 15 &= 8 \text{ あまり } 14 \text{ より, } 15 \text{ で割り切れるものは } 8 \text{ 個} \end{aligned}$$

よって、3 または 5 で割り切れるものは、
 $44 + 26 - 8 = 62$ 個あるので、3 でも 5 でも割り切れないものは、
 $134 - 62 = 72$ 個 ……(答)



(3) $111 = 3 \times 37$ であり、

$$\begin{aligned} 1998 \div 111 &= 18 \\ 18 &= 3^2 \times 2 \end{aligned}$$

より、条件をみたす自然数 n は、3 を 1 つだけ因数にもち、かつ、37 を因数にもち、かつ、2 を因数にもたない数.

また、(2)より、 n は、3 と 5 を 1 つずつだけ因数にもつ自然数であるから、合わせて、
『 n は、3 と 5 を 1 つだけ因数にもち、37 を因数にもち、2 を因数にもたない
2017 以下の自然数』

となる.

$$3 \times 5 \times 37 = 555$$

であり、

$$555 \times 7 = 3885 > 2017$$

であるから、条件をみたす自然数 n は、

$$555 \text{ ……(答)}$$