

[11]

(1)

$$\begin{cases} y = a \tan x \\ y = \sin 2x \end{cases} \text{を連立して解くと,}$$

$$a \tan x = \sin 2x$$

$$a \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x$$

$$a \sin x = 2 \sin x \cos^2 x$$

$$a \sin x = \sin x (1 + \cos 2x)$$

C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつとき, $\sin x \neq 0$ より,

$$a = 1 + \cos 2x$$

$$\cos 2x = a - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $0 < 2x < \pi$ であるから,

$$-1 < \cos 2x < 1$$

よって, ①が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で解をもつための条件は,

$$-1 < a - 1 < 1, \text{ すなわち, } 0 < a < 2$$

$\cdots \cdots$ (答)

(2)

$$y = a \tan x \text{ について, } y' = \frac{a}{\cos^2 x}$$

$$y = \sin 2x \text{ について, } y' = 2 \cos 2x$$

$x = p$ における接線が直交することより,

$$\begin{cases} a \tan p = \sin 2p \\ \frac{a}{\cos^2 p} \cdot 2 \cos 2p = -1 \\ a \sin p = 2 \sin p \cos^2 p \\ 2a \cos 2p = -\frac{1 + \cos 2p}{2} \end{cases}$$

$0 < p < \frac{\pi}{2}$ より, $\sin p \neq 0$ であるから,

$$\begin{cases} a = 2 \cos^2 p \\ 4a \cos 2p = -1 - \cos 2p \end{cases} \quad \cdots \cdots (*)$$

$$\begin{cases} a = 1 + \cos 2p \\ 4a \cos 2p = -1 - \cos 2p \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\cdots \cdots \textcircled{3}$$

②を③に代入して a を消去すると,

$$4(1 + \cos 2p) \cos 2p = -(1 + \cos 2p)$$

$0 < p < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < 2p < \pi$ よって, $\cos 2p \neq -1$ であるから,

$$4 \cos 2p = -1 \quad \therefore \cos 2p = -\frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

これを②に代入して,

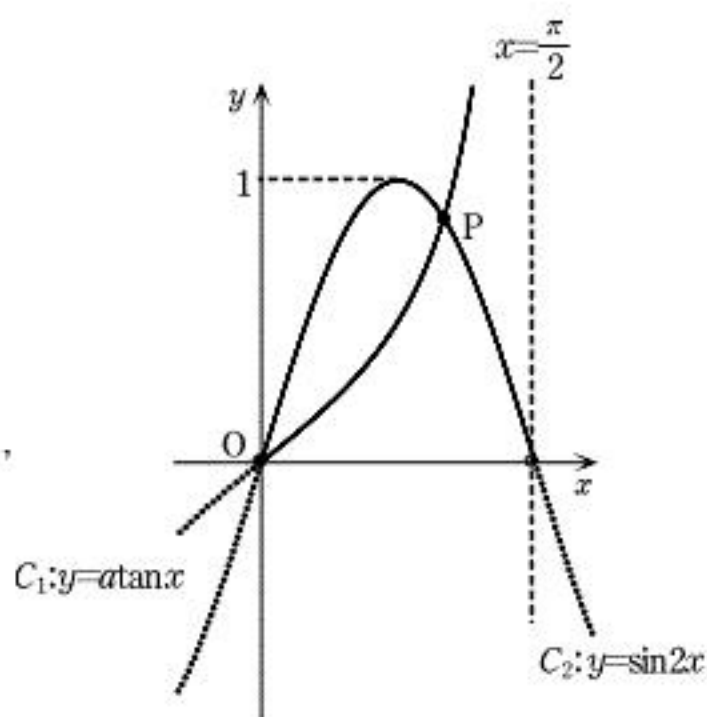
$$a = \frac{3}{4} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^p (\sin 2x - a \tan x) dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + a \log |\cos x| \right]_0^p \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2p + a \log |\cos p| - \left(-\frac{1}{2} + 0 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} \log \cos p + \frac{1}{2} \quad \left(\because 0 < p < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \cos p > 0 \right) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \log \cos^2 p \end{aligned}$$

ここで, (*)より, $\cos^2 p = \frac{a}{2} = \frac{3}{8}$ であるから, 囲まれた図形の面積は,

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \log \frac{3}{8} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$



[2]

(1)

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CD}$ とおくと, $AG \perp CD$ より,

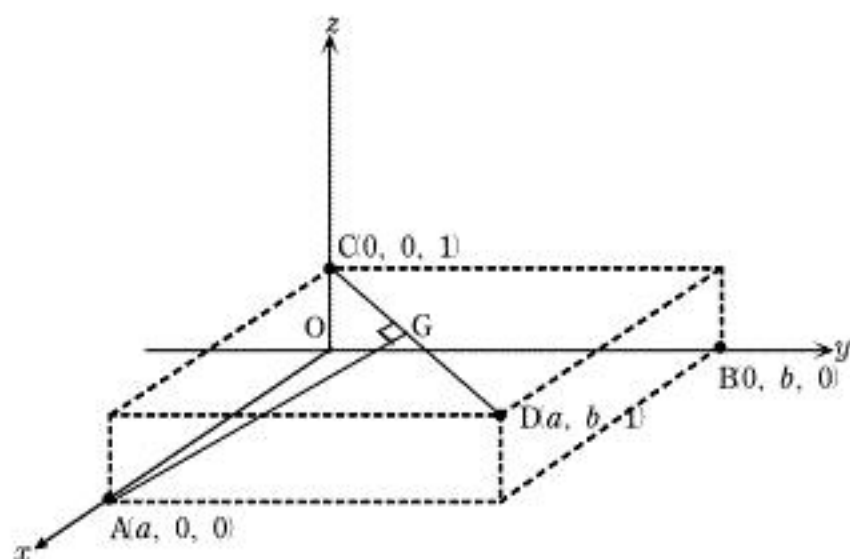
$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} (t-1)a \\ tb \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(t-1)a^2 + tb^2 = 0$$

$$\therefore t = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$



$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \frac{a^3}{a^2 + b^2} \\ \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$G\left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}, 1\right)$$

.....(答)

(2)

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CD}$ とおくと, $BH \perp CD$ より,

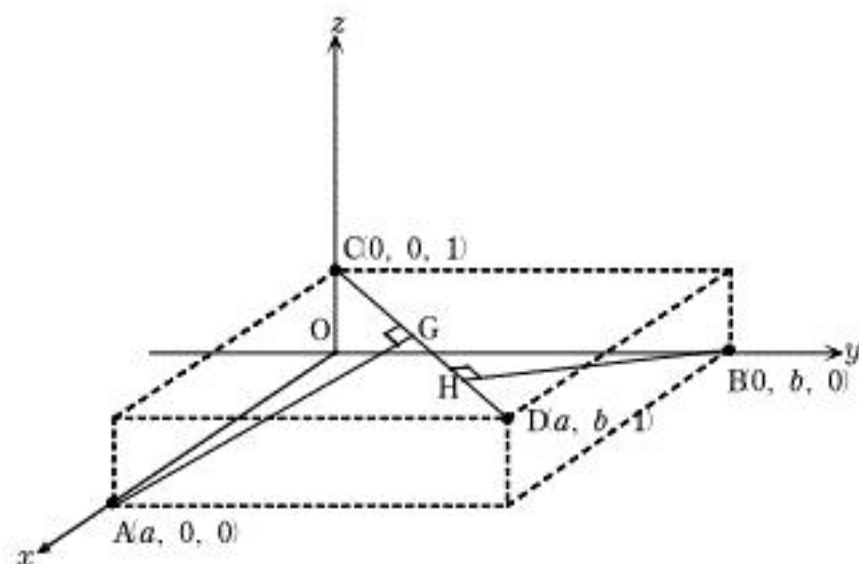
$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} sa \\ (s-1)b \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$sa^2 + (s-1)b^2 = 0$$

$$\therefore s = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$



このとき,

$$\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{a^2 + b^2}a \\ \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} - 1\right)b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \\ -\frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{また, } \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} (t-1)a \\ tb \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - 1\right)a \\ \frac{a^2}{a^2 + b^2}b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{ab^2}{a^2 + b^2} \\ \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH}}{\|\overrightarrow{AG}\| \|\overrightarrow{BH}\|} = \frac{\frac{-(ab^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{-(a^2 b)^2}{(a^2 + b^2)^2} + 1}{\sqrt{\frac{(-ab^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(a^2 b)^2}{(a^2 + b^2)^2} + 1} \sqrt{\frac{(ab^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(-a^2 b)^2}{(a^2 + b^2)^2} + 1}} \\ &= \frac{\frac{-a^2 b^4 - a^4 b^2}{(a^2 + b^2)^2} + 1}{\frac{a^2 b^4 + a^4 b^2}{(a^2 + b^2)^2} + 1} = \frac{-a^2 b^2 (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2 (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2} \\ &= \frac{-a^2 b^2 + a^2 + b^2}{a^2 b^2 + a^2 + b^2} \end{aligned}$$

.....(答)

$$\{a_n\}: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, \dots$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬

- (1) $\{a_n\}$ のうち、はじめて7の倍数となるのは $n=6$ のときであり、4と7は互いに素ゆえ、以降は7個おきに7の倍数が現れる。よって、 a_n が7の倍数となるのは $n=7m-1$ ($m=1, 2, \dots$)のときである。

$$7m-1 \leq 600 \text{ のとき, } 7m \leq 601, m \leq \frac{601}{7} = 85 + \frac{6}{7} \text{ より,}$$

第600項までで7の倍数となる項の個数は, 85(答)

- (2) $\{a_n\}$ のうち、はじめて 7^2 の倍数となるのは $n=13$ のときであり、4と 7^2 は互いに素ゆえ、以降は 7^2 個おきに 7^2 の倍数が現れる。よって、 a_n が 7^2 の倍数となるのは $n=49l-36$ ($l=1, 2, \dots$)のときである。

$$49l-36 \leq 600 \text{ のとき, } 49l \leq 636, l \leq \frac{636}{49} = 12 + \frac{48}{49} \text{ より,}$$

第600項までで 7^2 の倍数となる項の個数は, 12(答)

- (3) a_{13} までに7の倍数は a_6 と a_{13} が現れており、そのうち、 a_{13} は 7^2 で割り切れるので、積 $a_1 a_2 \dots a_{13}$ は 7^3 で割り切れる。

以降、7個おきに7の倍数が現れ、49個おきに 7^2 の倍数が現れるので、積を49個追加するごとに 7^8 でさらに割り切れることになる。

$$\frac{45-3}{8} = 5 + \frac{2}{8} \text{ より, 積を } 49 \times 5 \text{ 個追加し, さらに } 7 \times 2 \text{ 個追加すると, } 7^{45} \text{ で割り切れることになる}$$

ので、 n が

$$13 + 49 \times 5 + 7 \times 2 = 272$$

のときには、積が 7^{45} で割り切れることがわかる。

また、 $n \leq 272$ のとき、

7^2 の倍数である $a_{13} = 49, a_{62} = 49 \cdot 5, a_{111} = 49 \cdot 9, a_{160} = 49 \cdot 13, a_{209} = 49 \cdot 17, a_{258} = 49 \cdot 21$ の中で、

7^3 で割り切れるのは、 $n=258$ のときだけであるから、 $n=272$ のとき、積は 7^{46} で割り切れることがわかる。

したがって、積が 7^{45} で割り切れるときの n の最小値は、

$$272 - 7 = 265$$

.....(答)

赤を取り出す確率は、 $\frac{1}{2}$

青、白を取り出す確率は、それぞれ $\frac{1}{4}$

(1)

A が 4 回目に勝つのは

(I) A が 4 回取り出し続けて 4 回目に赤を取り出す

(II) 取り出す人が 1 周して 4 回目に A が赤を取り出す

のどちらかであり、(I)は青青青赤、(II)は白白白赤を取り出したときであるから、

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} \quad \dots\dots(\text{答})$$

A が 7 回目に勝つのは

(I) A が 7 回取り出し続けて 7 回目に A が赤を取り出す

(II) 取り出す人が 1 周して 7 回目に A が赤を取り出す

(III) 取り出す人が 2 周して 7 回目に A が赤を取り出す

のどれかであり、(I)は青青青青青青赤、(III)は白白白白白白赤、(II)は 1~6 回目までに白 3 回、青 3 回、7 回目に赤を取り出したときであるから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot {}_6C_3 \cdot \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+1+{}_6C_3) \\ &= \frac{11}{4096} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) n 回目に、A、B、C の誰かが玉を取り出すのは、 $1 \sim n-1$ 回までに青または白が取り出されたときであるから、

$$d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) $n-2$ 回目に A が玉を取り出し、 $n+1$ 回目にも A が玉を取り出すのは、

(I) $n-2$ 、 $n-1$ 、 n 回目に A が玉を取り出す

(II) 取り出す人が 1 周して $n+1$ 回目に A が玉を取り出す

のどちらかであり、(I)は青青青、(II)は白白白を取り出したときであるから、

$$a_{n-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + a_{n-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{32} a_{n-2}$$

$n-2$ 回目に B が玉を取り出し、 $n+1$ 回目に A が玉を取り出すのは、 $n-2$ 、 $n-1$ 、 n 回目のうち 2 回白、1 回青を取り出したときであるから、

$$b_{n-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot {}_3C_1 = \frac{3}{64} b_{n-2}$$

$n-2$ 回目に C が玉を取り出し、 $n+1$ 回目に A が玉を取り出すのは、 $n-2$ 、 $n-1$ 、 n 回目のうち 2 回青、1 回白を取り出したときであるから、

$$c_{n-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot {}_3C_1 = \frac{3}{64} c_{n-2}$$

よって、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{32} a_{n-2} + \frac{3}{64} (b_{n-2} + c_{n-2}) = \frac{1}{32} a_{n-2} + \frac{3}{64} (d_{n-2} - a_{n-2}) \\ &= \frac{3}{64} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} - \frac{1}{64} a_{n-2} = \frac{3}{2^{n+3}} - \frac{1}{64} a_{n-2} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

[5]

(1)

$$\alpha = 10000\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 10000\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ より,}$$

$$|\alpha| = 10000\sqrt{2}, \arg \alpha = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \quad (l \text{ は整数})$$

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \text{ より,}$$

$$|w| = \frac{1}{2}, \arg w = \frac{\pi}{6} + 2m\pi \quad (m \text{ は整数})$$

$$\begin{aligned} |z_n| &= |\alpha w^n| = |\alpha| |w|^n \\ &= 10000\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{10000\sqrt{2}}{2^n} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} \arg z_n &= \arg \alpha w^n = \arg \alpha + n \arg w \\ &= \frac{\pi}{4} + 2l\pi + n\left(\frac{\pi}{6} + 2m\pi\right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}n + 2k\pi \quad (k \text{ は整数}) \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad \frac{10000\sqrt{2}}{2^n} \leq 1 \text{ のとき, } 10000\sqrt{2} \leq 2^n$$

$$\log_{10} 10000\sqrt{2} \leq \log_{10} 2^n$$

$$\log_{10} 10^4 + \log_{10} 2^{\frac{1}{2}} \leq n \log_{10} 2$$

$$n \geq \frac{4 + 0.1505}{0.301} = \frac{4.1505}{0.301} = 13.7\dots\dots$$

よって,

$$n \text{ の最小値は } 14 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad n \geq 14 \text{ のとき, } |z_n| \leq 1 \text{ であるから,}$$

$$\arg z_n = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数}) \text{ と } |z_n| \leq 1 \text{ より,}$$

$P_{17}(z_{17})$ は線分 OA 上にあるので, $\triangle ABC$ の内部に含まれる.

また, $n \leq 13$ のとき, $|z_n| > 1$ であるから,

$P_n(z_n)$ は, $\triangle ABC$ の内部にはない.

ここで, 図のように AC 上に偏角が,

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \cdot 14 + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \cdot 15 + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \cdot 16 + 2k\pi$$

となる点 D(d), E(e), F(f) をそれぞれとると,

$$OA = 1 \text{ から, } OD = OF = \frac{1}{\sqrt{3}}, OE = \frac{1}{2} \text{ とわかるので,}$$

$$|d| = |f| = \frac{1}{\sqrt{3}}, |e| = \frac{1}{2}$$

$P_{14}(z_{14}), P_{15}(z_{15}), P_{16}(z_{16})$ は半直線 OD, OE, OF 上にそれぞれあるから,

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{|z_{14}|}{|d|} &= \log_{10} \frac{10000\sqrt{6}}{2^{14}} = \log_{10} 10^4 + \frac{1}{2} \log_{10} 6 - \log_{10} 2^{14} \\ &= 4 + \frac{1}{2}(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) - 14 \log_{10} 2 = 0.175 > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{|z_{14}|}{|d|} > 1, \text{ すなわち } |z_{14}| > |d| \text{ となるので, } P_{14} \text{ は } \triangle ABC \text{ の外部にある.}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{|z_{15}|}{|e|} &= \log_{10} \frac{10000\sqrt{2}}{2^{14}} = \log_{10} 10^4 + \frac{1}{2} \log_{10} 2 - \log_{10} 2^{14} \\ &= 4 + \frac{1}{2} \log_{10} 2 - 14 \log_{10} 2 = -0.0635 < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{|z_{15}|}{|e|} < 1, \text{ すなわち } |z_{15}| < |e| \text{ となるので, } P_{15} \text{ は } \triangle ABC \text{ の内部にある.}$$

$$\text{以上より, 点 } P_n \text{ が } \triangle ABC \text{ の内部に含まれる最小の自然数 } n \text{ は } 15 \quad \dots\dots(\text{答})$$

