

[1]

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする。

条件より、 d を実数の定数として、

$$f(x)=(x-c)^2(x+d)$$

と表せる。

$$f(x)=x^3+(d-2c)x^2+(c^2-2cd)x+c^2d$$

だから、係数を比較することで、

$$a=d-2c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b=c^2-2cd \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$c=c^2d \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。 $c>0$ なので、 $\textcircled{3}$ より、

$$d=\frac{1}{c}$$

これを $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ へ代入することで、

$$a=\frac{1}{c}-2c \quad \cdots \text{答}$$

$$b=c^2-2c\cdot\frac{1}{c}=c^2-2 \quad \cdots \text{答}$$

(2) (1)の結果より、

$$f(x)=(x-c)^2\left(x+\frac{1}{c}\right)$$

だから $y=f(x)$ のグラフは右のようになる。

よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{c}}^c f(x) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{c}}^c (x-c)^2 \left\{ x-c + \left(c + \frac{1}{c} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{c}}^c \left\{ (x-c)^3 + \left(c + \frac{1}{c} \right) (x-c)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4} (x-c)^4 + \frac{1}{3} \left(c + \frac{1}{c} \right) (x-c)^3 \right]_{-\frac{1}{c}}^c \\ &= -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{c} - c \right)^4 - \frac{1}{3} \left(c + \frac{1}{c} \right) \left(-\frac{1}{c} - c \right)^3 \\ &= -\frac{1}{4} \left(c + \frac{1}{c} \right)^4 + \frac{1}{3} \left(c + \frac{1}{c} \right)^4 \\ &= \frac{1}{12} \left(c + \frac{1}{c} \right)^4 \end{aligned}$$

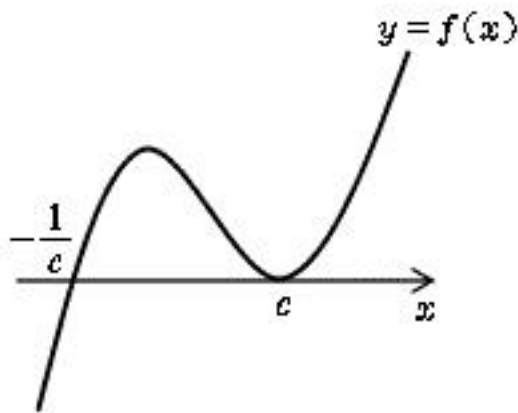
ここで $c>0$ だから、

$$c + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{c}} = 2 \quad (\text{相加平均} \cdot \text{相乗平均の大小関係、等号成立は } c=1 \text{ のとき})$$

が成立するから、

$$S \geq \frac{1}{12} \cdot 2^4 = \frac{4}{3} \quad (\text{等号成立は } c=1 \text{ のとき})$$

となる。従って、 S を最小にする c の値は、 $c=1$ $\cdots$ 答



[2]

(1) m を 0 以上の整数とするとき、

$$2^{m+3} - 2^m = 8 \cdot 2^m - 2^m = 7 \cdot 2^m$$

が成立する。よって、 2^m と 2^{m+3} を 7 で割った余りは等しい。

さて、

$$2^1 = 2 = 7 \cdot 0 + 2$$

$$2^2 = 4 = 7 \cdot 0 + 4$$

$$2^3 = 8 = 7 \cdot 1 + 1$$

だから、 2^n を 7 で割った余りは、 k を自然数として、

$$\begin{cases} n = 3k - 2 \text{ のとき } 2 \\ n = 3k - 1 \text{ のとき } 4 \\ n = 3k \text{ のとき } 1 \text{ (これは } k = 0 \text{ でも成立する)} \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $101_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5$ である。よって、

$$\begin{aligned} m = 101101101101101101_{(2)} &= 5 \cdot 2^{15} + 5 \cdot 2^{12} + 5 \cdot 2^9 + 5 \cdot 2^6 + 5 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^0 \\ &= 5(2^{15} + 2^{12} + 2^9 + 2^6 + 2^3 + 2^0) \end{aligned}$$

よって、(1)の結果より、7 を法として、

$$\begin{aligned} m &\equiv 5(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\ &\equiv 5 \cdot 6 \\ &\equiv 2 \end{aligned}$$

従って m を 7 で割った余りは 2 …答

$$\begin{aligned} ※ \quad m &= 5(32768 + 4096 + 512 + 64 + 8 + 1) \\ &= 187245 \\ &= 7 \cdot 26749 + 2 \end{aligned}$$

[3]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad L &= |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 \\
 &= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}|^2 \\
 &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OP} + 3|\overrightarrow{OP}|^2 \\
 &= 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \quad \cdots \text{証明終わり}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad L &= 3\left\{|\vec{x}|^2 - \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{x}\right\} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\
 &= 3\left|\vec{x} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 3\left|\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2 \\
 &= 3\left|\vec{x} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\right|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \frac{1}{3}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2
 \end{aligned}$$

よって L は $\vec{x} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ のとき最小となる。

これは点 P が三角形 ABC の重心であることを示す。 $\cdots$ 証明終わり

また、最小値は、

$$\begin{aligned}
 &|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \frac{1}{3}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \\
 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}}{3} \\
 &= \frac{1}{3}(2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + 2|\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{c} \cdot \vec{a}) \\
 &= \frac{1}{3}(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2) \\
 &= \frac{1}{3}(|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2) \\
 &= \frac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2) \\
 &= \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)
 \end{aligned}$$

である。 $\cdots$ 証明終わり

【4】

部品 a が不良品であるという事象を A ，部品 b が不良品であるという事象を B ，部品 c が不良品であるという事象を C とする。このとき、条件より、

$$P(A) = p$$

$$P_{\bar{A}}(B) = q \quad \cdots \textcircled{1}, \quad P_A(B) = 3q \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$P_{\bar{B}}(C) = r \quad \cdots \textcircled{3}, \quad P_B(C) = 5r \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成立する。

(1) ①より、

$$\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = q \text{ から、 } P(\bar{A} \cap B) = qP(\bar{A}) = q\{1 - P(A)\} = q(1 - p)$$

よって求める確率は、

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= p + q(1 - p) \\ &= p + q - pq \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) ②より、

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 3q \text{ から、 } P(A \cap B) = 3qP(A) = 3pq$$

よって、

$$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = q(1 - p) + 3pq = q + 2pq$$

また③、④より、

$$\frac{P(\bar{B} \cap C)}{P(\bar{B})} = r \text{ から、 } P(\bar{B} \cap C) = rP(\bar{B}) = r\{1 - P(B)\}$$

$$\frac{P(B \cap C)}{P(B)} = 5r \text{ から、 } P(B \cap C) = 5rP(B)$$

よって、

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{B} \cap C) + P(B \cap C) \\ &= r\{1 - P(B)\} + 5rP(B) \\ &= r\{1 + 4P(B)\} \\ &= r(1 + 4q + 8pq) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(3) 求める確率は、

$$P_C(B) = \frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{5r(q + 2pq)}{r(1 + 4q + 8pq)} = \frac{5q(1 + 2p)}{1 + 4q + 8pq} \quad \cdots \text{答}$$