

[1]

硬貨を 10 回投げたとき、表が k 回出るとする。このとき $10-k$ 回は裏が出る。
ただし、 $k=0,1,2,3,\dots,10$ である。このとき、出た数字 10 個の積を P とすると、

$$P = 3^k 8^{10-k}$$

であり、これが 8 桁の整数となる条件は、

$$10^7 \leq P < 10^8$$

を満たすことである。両辺の常用対数を取ると、

$$\log_{10} 10^7 \leq \log_{10} P < \log_{10} 10^8$$

$$7 \leq \log_{10} (3^k 8^{10-k}) < 8$$

であり、

$$\begin{aligned} \log_{10} (3^k 8^{10-k}) &= \log_{10} 3^k + \log_{10} 8^{10-k} \\ &= k \log_{10} 3 + (10-k) \cdot 3 \log_{10} 2 \\ &= k \cdot 0.4771 + (10-k) \cdot 3 \cdot 0.3010 \\ &= 9.03 - 0.4259 k \end{aligned}$$

となる。よって、

$$7 \leq 9.03 - 0.4259 k < 8$$

$$\Leftrightarrow 1.03 < 0.4259 k \leq 2.03$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{1782}{4259} < k \leq 4 + \frac{3264}{4259}$$

よって、

$$k = 3, 4$$

のみ成立する。したがって求める確率は、

$$\begin{aligned} & {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^7 + {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right)^6 \\ &= \frac{120 + 210}{2^{10}} \\ &= \frac{165}{512} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

[2]

$$f(x)=x^3-kx^2+kx+1$$

とおく。このとき、

$$f'(x)=3x^2-2kx+k$$

である。さて、 $f(x)$ が極値をもつとき、

$$f'(x)=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

は異なる2つの実数解をもつから、①の判別式を D として、

$$D>0$$

が必要。よって、

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-3k=k(k-3)$$

より、 $k(k-3)>0$ を解いて、

$$k<0, \quad 3<k \quad \cdots \textcircled{2}$$

この条件のもとで①の解を $\alpha, \beta (\alpha<\beta)$ とおくと、

$f(x)$ の増減は右表のようになる。

よって、条件から、

$$f(\alpha)-f(\beta)=4|k|^3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。ここで、

$$\begin{aligned} f(\alpha)-f(\beta) &= \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx \\ &= 3 \int_{\beta}^{\alpha} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= 3 \left(-\frac{1}{6} \right) (\alpha-\beta)^3 \\ &= \frac{1}{2} (\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

であり、①より

$$x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-3k}}{3}$$

よって、 $\beta=\frac{k+\sqrt{k^2-3k}}{3}$, $\alpha=\frac{k-\sqrt{k^2-3k}}{3}$ なので、

$$\beta-\alpha=\frac{2\sqrt{k^2-3k}}{3}$$

よって、③とで、

$$4|k|^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{k^2-3k}}{3}\right)^3$$

$$27|k|^3=\left(\sqrt{k^2-3k}\right)^3$$

$$3|k|=\sqrt{k^2-3k}$$

$$9k^2=k^2-3k$$

$$k(8k+3)=0$$

$$k=0, -\frac{3}{8}$$

②より、

$$k=-\frac{3}{8} \quad \cdots \text{答}$$

[3]

$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{AC}=(3,3,3)$ であり、

平面 α の法線ベクトルの1つを $\vec{n}=(a,b,c)$ とすると、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0$$

が成立する。よって、

$$2a=0 \quad \text{かつ} \quad 3a+3b+3c=0$$

より、

$$a=0, \quad b+c=0$$

よって $\vec{n}=(0,1,-1)$ として考えてよい。

(1) 点Hは、

平面 α 上 …①

$PH \perp$ 平面 α …②

を満たす点だから、①より、

$$\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad (x, y \text{ は実数の定数})$$

と表せ、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \\ &= (1+2x+3y, 2+3y, 3+3y) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

また②より、

$$\overrightarrow{PH} \parallel \vec{n}$$

だから、

$$\overrightarrow{PH} = k\vec{n} \quad (k \text{ は実数の定数})$$

と表せ、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OP} + k\vec{n} \\ &= (6, p+k, q-k) \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③, ④から、

$$1+2x+3y=6 \quad \text{かつ} \quad 2+3y=p+k \quad \text{かつ} \quad 3+3y=q-k$$

が成立し、これを x, y, k の連立方程式として解くと、

$$x = \frac{1}{4}(-p-q+15), \quad y = \frac{1}{6}(p+q-5), \quad k = \frac{1}{2}(-p+q-1)$$

となる。以上から、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PH}| &= |k\vec{n}| \\ &= \left| \frac{-p+q-1}{2} \right| \cdot \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} \\ &= \frac{|p-q+1|}{\sqrt{2}} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

※次のようにも出せる。

平面 α の方程式は、

$$y-z+1=0$$

これと点 $P(6, p, q)$ の距離を計算することで、

$$\frac{|0+p-q+1|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|p-q+1|}{\sqrt{2}} \quad \dots \text{答}$$

(2) $(p-9)^2 + (q-7)^2 = 1$ より、

$$p-9 = \cos\theta, \quad q-7 = \sin\theta \quad (\theta \text{ は } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ で考えてよい})$$

とおける。このとき、

$$\begin{aligned} p-q+1 &= \cos\theta - \sin\theta + 3 \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \end{aligned}$$

より、

$$(0 <) 3 - \sqrt{2} \leq p-q+1 \leq 3 + \sqrt{2}$$

従って、

$$\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{|p-q+1|}{\sqrt{2}} \leq \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

である。以上より、

$$\frac{3\sqrt{2}-2}{2} \leq PH \leq \frac{3\sqrt{2}+2}{2}$$

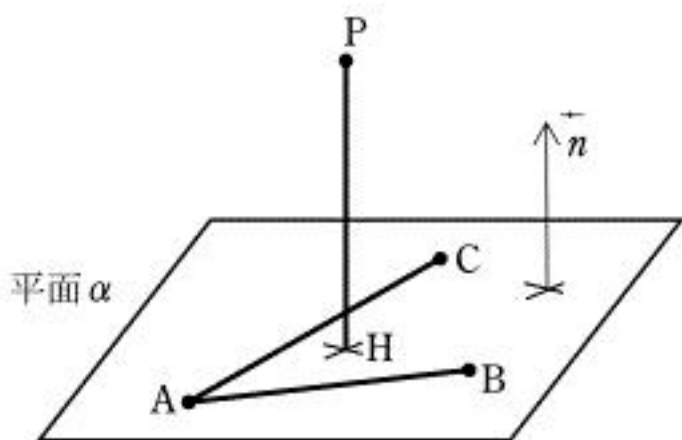
$\triangle ABC$ の面積は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(2^2+0^2+0^2)(3^2+3^2+3^2) - (2 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3)^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

だから、四面体 $ABCP$ の体積について、

$$\text{最大値は、} \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}+2}{2} = 3 + \sqrt{2} \quad \dots \text{答}$$

$$\text{最小値は、} \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}-2}{2} = 3 - \sqrt{2} \quad \dots \text{答}$$



[4]

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} g(x^3) &= x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \\ &= x^2 \{ x^2 f(x) - 3g(x) - 6 \} - 2 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

について、

(1) $f(x)$ の次数を m , $g(x)$ の次数を n とする。

このとき、

$$m \geq 3 \quad \text{または} \quad n \geq 3 \quad \cdots \ast$$

と仮定する。ここで、①について、

$$\text{左辺の次数は } 2m (\geq 6), \quad \text{右辺の次数は } 2+n (\geq 5)$$

より $2m = 2+n \quad \cdots \textcircled{3}$ をみたす。また②について、

$$\text{左辺の次数は } 3n$$

右辺の $\{ \}$ 内の式について、 $x^2 f(x)$ の次数は $2+m$, $3g(x)$ の次数は n である。以下、 m の値で場合分けをして考える。

(i) $m=3$ のとき、③より $n=4$ だから、②の両辺の次数を考えると、

$$\text{左辺が } 12 \text{ 次、右辺が } 7 \text{ 次}$$

となり、不適。

(ii) $m=4$ のとき、③より $n=6$ だから、②の両辺の次数を考えると、

$$\text{左辺が } 18 \text{ 次、右辺は } 8 \text{ 次}$$

となり、不適。

(iii) $m \geq 5$ のとき、③より $n \geq 8$ であり、

$$n - (2+m) = m - 4 > 0 \quad \text{から} \quad 2+m < n$$

なので、②の両辺の次数を考えると、

$$3n = 2+n$$

が成立する。このとき、

$$n = 1$$

となり不適。

以上よりいずれにせよ矛盾が起こることから $\ast$ の否定が成立し、 $m \leq 2$ かつ $n \leq 2$ である。つまり、 $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下である。 $\cdots$ 証明終わり

(2) (1) の結果より、

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad g(x) = px^2 + qx + r$$

とおける。このとき、①、②でそれぞれ $x=0$ とすると、

$$f(0) = 2g(0) + 7, \quad g(0) = -2$$

が成立するから、

$$f(0) = 3$$

以上より、

$$f(x) = ax^2 + bx + 3, \quad g(x) = px^2 + qx - 2$$

と表せる。ここで、①より、

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^2 + 3 &= (x^2 + 2)(px^2 + qx - 2) + 7 \\ &= px^4 + qx^3 + 2(p-1)x^2 + 2qx + 3 \end{aligned}$$

より係数比較をすることで、

$$a = p, \quad 0 = q, \quad b = 2(p-1), \quad 0 = 2q$$

となり、

$$q = 0, \quad p = a, \quad b = 2(a-1) \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。また、②より、

$$\begin{aligned} px^6 + qx^3 - 2 &= x^4(ax^2 + bx + 3) - 3x^2(px^2 + qx - 2) - 6x^2 - 2 \\ &= ax^6 + bx^5 + 3(1-p)x^4 - 3qx^3 - 2 \end{aligned}$$

より係数比較をすることで、

$$p = a, \quad 0 = b, \quad 0 = 3(1-p), \quad q = -3q \quad \cdots \textcircled{5}$$

となり、④、⑤を解くことで、

$$a = 1, \quad b = 0, \quad p = 1, \quad q = 0$$

となる。以上から、

$$f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = x^2 - 2 \quad \cdots \text{答}$$