

[1]

$$f(x, y) = \int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

とおく。

$$\begin{aligned} & (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 \\ &= \sin^2(2n\pi t) + x^2 t^2 + y^2 \\ &\quad - 2xt \sin(2n\pi t) - 2y \sin(2n\pi t) + 2xyt \\ &= \frac{1}{2} \{1 - \cos(4n\pi t)\} + x^2 t^2 + y^2 \\ &\quad - 2xt \sin(2n\pi t) - 2y \sin(2n\pi t) + 2xyt \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{4n\pi} \sin(4n\pi t) \right) + \frac{1}{3} x^2 t^3 + y^2 t + 2y \cdot \frac{1}{2n\pi} \cos(2n\pi t) + xyt^2 \right]_0^1 \\ &\quad - 2x \int_0^1 t \sin(2n\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n\pi} \sin(4n\pi) \right) + \frac{1}{3} x^2 + y^2 + \frac{y}{n\pi} \cos(2n\pi) + xy - \frac{y}{n\pi} \cos 0 \\ &\quad - 2x \left\{ \left[t \left(-\frac{1}{2n\pi} \cos(2n\pi t) \right) \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \left(-\frac{1}{2n\pi} \cos(2n\pi t) \right) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} x^2 + y^2 + \frac{y}{n\pi} + xy - \frac{y}{n\pi} - 2x \left(-\frac{1}{2n\pi} + \frac{1}{2n\pi} \left[\frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi t) \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{1}{3} x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{n\pi} x + \frac{1}{2} \\ &= \left(y + \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \left(x + \frac{6}{n\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2 \pi^2} \end{aligned}$$

これは $y + \frac{x}{2} = 0$ かつ $x + \frac{6}{n\pi} = 0$ より $x = -\frac{6}{n\pi}$, $y = \frac{3}{n\pi}$ で最小となり、 $f(x, y)$ の最小値は、

$$I_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2 \pi^2}$$

従って、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2} \quad \cdots \text{答}$$

[2]

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} g(x^3) &= x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \\ &= x^2 \{ x^2 f(x) - 3g(x) - 6 \} - 2 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

について、

(1) $f(x)$ の次数を m , $g(x)$ の次数を n とする。

このとき、

$$m \geq 3 \quad \text{または} \quad n \geq 3 \quad \cdots \ast$$

と仮定する。ここで、 $\textcircled{1}$ について、

$$\text{左辺の次数は } 2m (\geq 6) \quad , \quad \text{右辺の次数は } 2+n (\geq 5)$$

より $2m = 2+n \quad \cdots \textcircled{3}$ をみたとす。また $\textcircled{2}$ について、

$$\text{左辺の次数は } 3n$$

$$\text{右辺の } \{ \} \text{ 内の式について、 } x^2 f(x) \text{ の次数は } 2+m, \quad 3g(x) \text{ の次数は } n$$

である。以下、 m の値で場合分けをして考える。

(i) $m=3$ のとき、 $\textcircled{3}$ より $n=4$ だから、 $\textcircled{2}$ の両辺の次数を考えると、

$$\text{左辺が } 12 \text{ 次、右辺が } 7 \text{ 次}$$

となり、不適。

(ii) $m=4$ のとき、 $\textcircled{3}$ より $n=6$ だから、 $\textcircled{2}$ の両辺の次数を考えると、

$$\text{左辺が } 18 \text{ 次、右辺は } 8 \text{ 次以下}$$

となり、不適。

(iii) $m \geq 5$ のとき、 $\textcircled{3}$ より $n \geq 8$ であり、

$$n - (2+m) = m - 4 > 0 \quad \text{から} \quad 2+m < n$$

なので、 $\textcircled{2}$ の両辺の次数を考えると、

$$3n = 2+n$$

が成立する。このとき、

$$n = 1$$

となり不適。

以上よりいずれにせよ矛盾が起こることから $\ast$ の否定が成立し、 $m \leq 2$ かつ $n \leq 2$ である。つまり、

$f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下である。 $\cdots$ 証明終わり

(2) (1) の結果より、

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad g(x) = px^2 + qx + r$$

とおける。このとき、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ でそれぞれ $x=0$ とすると、

$$f(0) = 2g(0) + 7, \quad g(0) = -2$$

が成立するから、

$$f(0) = 3$$

以上より、

$$f(x) = ax^2 + bx + 3, \quad g(x) = px^2 + qx - 2$$

と表せる。ここで、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^2 + 3 &= (x^2 + 2)(px^2 + qx - 2) + 7 \\ &= px^4 + qx^3 + 2(p-1)x^2 + 2qx + 3 \end{aligned}$$

より係数比較をすることで、

$$a = p, \quad 0 = q, \quad b = 2(p-1), \quad 0 = 2q$$

となり、

$$q = 0, \quad p = a, \quad b = 2(a-1) \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。また、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} px^6 + qx^3 - 2 &= x^4(ax^2 + bx + 3) - 3x^2(px^2 + qx - 2) - 6x^2 - 2 \\ &= ax^6 + bx^5 + 3(1-p)x^4 - 3qx^3 - 2 \end{aligned}$$

より係数比較をすることで、

$$p = a, \quad 0 = b, \quad 0 = 3(1-p), \quad q = -3q \quad \cdots \textcircled{5}$$

となり、 $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ を解くことで、

$$a = 1, \quad b = 0, \quad p = 1, \quad q = 0$$

となる。以上から、

$$f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = x^2 - 2 \quad \cdots \text{答}$$

[3]

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots \textcircled{1} \quad (a,b,c \text{ はいずれも } 1 \text{ 以上 } 6 \text{ 以下の自然数})$$

について、①の判別式を D とすると、

$$D=b^2-4ac \quad \cdots \textcircled{2}$$

(1) P_1 と P_2 が一致する

$$\Leftrightarrow \textcircled{1} \text{ が重解をもつ}$$

$$\Leftrightarrow D=0$$

よって②より、 $b^2=4ac$ となり、これを満たす (a,b,c) の組は、
 b が偶数の必要があることから、

$$b=2 \text{ のとき、} ac=1 \text{ より } (a,c)=(1,1)$$

$$b=4 \text{ のとき、} ac=4 \text{ より } (a,c)=(1,4),(2,2),(4,1)$$

$$b=6 \text{ のとき、} ac=9 \text{ より } (a,c)=(3,3)$$

以上の 5 通りある。したがって求める確率は、

$$\frac{5}{6^3}=\frac{5}{216} \quad \cdots \text{答}$$

(2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にあるのは、

$$\textcircled{1} \text{ の } 2 \text{ 解を } \alpha, \beta \text{ としたとき、} |\alpha|=|\beta|=1 \text{ を満たすときである。}$$

(i) $D \geq 0$ のとき、②より、

$$b^2 \geq 4ac \quad \cdots \textcircled{3}$$

(ア) $b^2=4ac$ のとき、

$$\textcircled{1} \text{ は } x=1 \text{ または } x=-1 \text{ を重解にもてばよく、}$$

$$a+b+c=0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$a-b+c=0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

として④が成立するか、⑤が成立すればよい。しかし、 a,b,c はすべて自然数なので前者は不適。後者は、

$$a+c=b \quad \cdots \textcircled{6}$$

である。(1)の 5 通りの中で⑥をみたすものは、

$$(a,b,c)=(1,2,1), (2,4,2), (3,6,3) \text{ の } 3 \text{ 通りのみ。}$$

(イ) $b^2 > 4ac$ のとき、

$$\textcircled{1} \text{ は } x=1 \text{ と } x=-1 \text{ を解にもてばよい。つまり、} \textcircled{4} \text{ かつ } \textcircled{5} \text{ が成立すればよい。}$$

$$\text{このとき、}$$

$$a+c=b=0$$

$$\text{となり、不適。}$$

(ii) $D < 0$ のとき、 $b^2 < 4ac \quad \cdots \textcircled{7}$ であり、

$$\textcircled{1} \text{ は異なる } 2 \text{ つの虚数解をもち、} |\alpha|=|\beta|=1 \text{ のとき、}$$

$$|\alpha\beta|=1$$

$$\text{となり、解と係数の関係より}$$

$$\left| \frac{c}{a} \right| = 1$$

$$\text{となる。よって、} c=a \text{ であればよい。} \textcircled{7} \text{ とで、} b^2 < 4a^2 \text{ だから、}$$

$$a=1 \text{ のとき、} b^2 < 4 \text{ より } b=1$$

$$a=2 \text{ のとき、} b^2 < 16 \text{ より } b=1,2,3$$

$$a=3 \text{ のとき、} b^2 < 36 \text{ より } b=1,2,3,4,5$$

$$a \geq 4 \text{ のとき } 4a^2 \geq 64 \text{ から、いずれの } a \text{ に対しても } b=1,2,3,4,5,6 \text{ の全てが適する。}$$

$$\text{以上より、} 1+3+5+3 \cdot 6=27 \text{ (通り)}$$

以上から求める確率は、

$$\frac{3+27}{6^3}=\frac{30}{216}=\frac{5}{36} \quad \cdots \text{答}$$

(3) ①が実数解をもつ場合は、 P_1, P_2 がともに実軸上にあるため、題意を満たさない。

従って、①が虚数解をもつ場合を考えればよく、 $D < 0$ から $b^2-4ac < 0$ である。

すると、①は異なる 2 つの虚数解をもち、2 解は複素共役であるから、 P_1, P_2 は実軸対称な 2 点となる。
ここで①より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{4ac-b^2}i) \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

であることから、 $a,b,c > 0$ であることとで、2 点 P_1, P_2 は第 2、第 3 象限の点となり、

これらにより作られる 2 直線 l_1, l_2 のなす鋭角が 60° となるのは、①の虚数解の 1 つ(虚部が正のもの)

の偏角が、 $\frac{2}{3}\pi (=120^\circ), \frac{5}{6}\pi (=150^\circ)$ のいずれかの場合である。

$$\tan \frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}, \quad \tan \frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから、

$$\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{b} = \sqrt{3} \text{ または } \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow ac=b^2 \text{ または } 3ac=b^2$$

これらはともに $b^2 < 4ac$ を満たす。すると、

(i) $ac=b^2$ について、

$$b=1 \text{ のとき、} ac=1 \text{ から } (a,c)=(1,1)$$

$$b=2 \text{ のとき、} ac=4 \text{ から } (a,c)=(1,4),(2,2),(4,1)$$

$$b=3 \text{ のとき、} ac=9 \text{ から } (a,c)=(3,3)$$

$$b=4 \text{ のとき、} ac=16 \text{ から } (a,c)=(4,4)$$

$$b=5 \text{ のとき、} ac=25 \text{ から } (a,c)=(5,5)$$

$$b=6 \text{ のとき、} ac=36 \text{ から } (a,c)=(6,6)$$

以上、8 組存在する。

(ii) $3ac=b^2$ について、 b が 3 の倍数である必要があり、

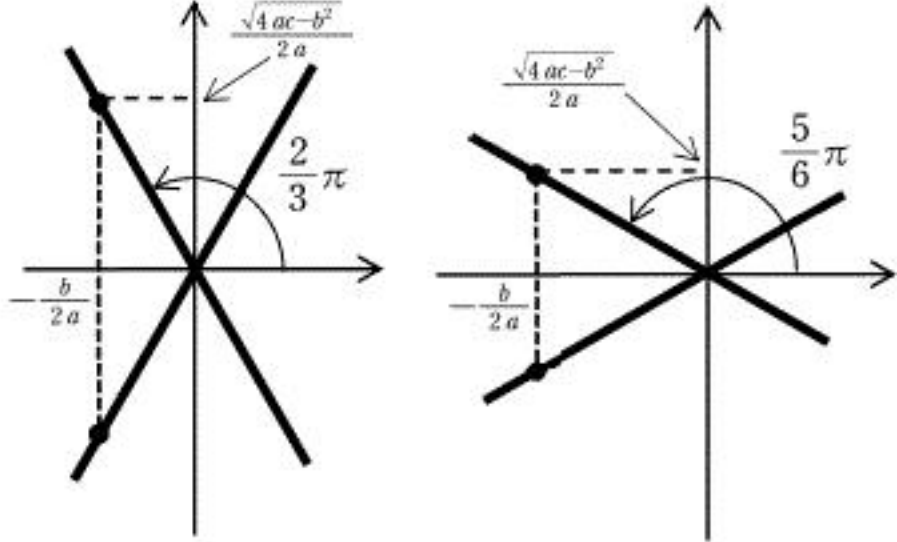
$$b=3 \text{ のとき、} ac=3 \text{ から } (a,c)=(1,3),(3,1)$$

$$b=6 \text{ のとき、} ac=12 \text{ から } (a,c)=(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)$$

以上、6 組存在する。

以上から、求める確率は、

$$\frac{8+6}{6^3}=\frac{14}{216}=\frac{7}{108} \quad \cdots \text{答}$$



[4]

題意の三角形 OAB は 2 辺の長さが 2 の正三角形である。

三角形 $P_n BQ_n$ は $P_n B : BQ_n = 2 : 1$ の直角三角形であり、

$AP_n = p_n$ とすると、

$$BP_n = AB - AP_n = 2 - p_n$$

$$BQ_n = \frac{1}{2} BP_n = \frac{1}{2} (2 - p_n) = 1 - \frac{1}{2} p_n$$

$$OQ_n = OB - BQ_n = 2 - \left(1 - \frac{1}{2} p_n \right) = 1 + \frac{1}{2} p_n$$

三角形 $Q_n OR_n$ は $Q_n O : OR_n = 2 : 1$ の直角三角形であり、

$$OR_n = \frac{1}{2} OQ_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} p_n \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} p_n$$

$$AR_n = OA - OR_n = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} p_n \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} p_n$$

三角形 $R_n AP_{n+1}$ は $R_n A : AP_{n+1} = 2 : 1$ の直角三角形であり、

$$AP_{n+1} = \frac{1}{2} AR_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} p_n \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} p_n$$

よって、

$$p_{n+1} = -\frac{1}{8} p_n + \frac{3}{4}$$

が成立する。すると、

$$p_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{8} \left(p_n - \frac{2}{3} \right)$$

より数列 $\left\{ p_n - \frac{2}{3} \right\}$ は公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列だから、

$$p_n - \frac{2}{3} = \left(p_1 - \frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{8} \right)^{n-1}$$

$$p_n = \frac{2}{3} + \left(p_1 - \frac{2}{3} \right) \left(-\frac{1}{8} \right)^{n-1}$$

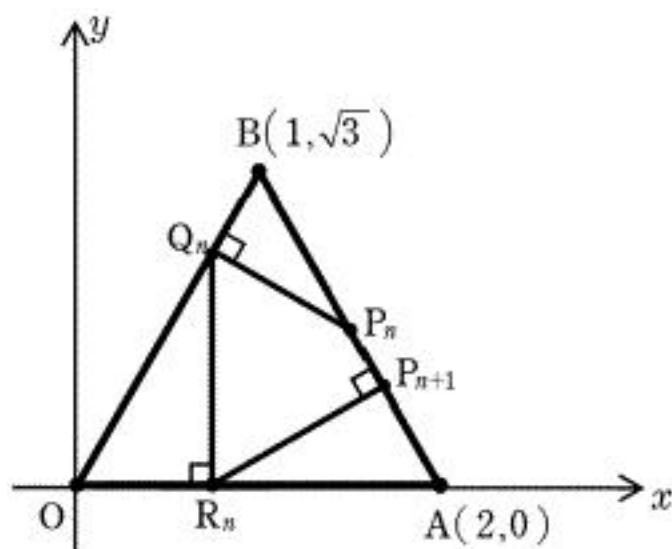
p_1 は定数なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{2}{3}$$

従って、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 P_n は線分 AB を $\frac{2}{3} : \left(2 - \frac{2}{3} \right) = 1 : 2$ の比に内分する点に収束するから、

求める点の座標は、

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{1 + 2}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot \sqrt{3}}{1 + 2} \right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad \dots \text{答}$$



[5]

$$w = \frac{az+b}{cz+1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

について、 a, b, c は複素数であり、 c は純虚数でない。

(ア)より、

$$i = \frac{a \cdot i + b}{c \cdot i + 1} \quad \text{かつ} \quad -i = \frac{a \cdot (-i) + b}{c \cdot (-i) + 1}$$

が成立し、

$$b + c + (a - 1)i = 0 \quad \text{かつ} \quad b + c - (a - 1)i = 0$$

$$\Leftrightarrow b + c = 0 \quad \text{かつ} \quad (a - 1)i = 0$$

よって $a = 1$ 、 $b = -c$ となり、

$$w = \frac{z - c}{cz + 1}$$

と表せる。次に(イ)より、任意の z に対して

$$|w| = 1$$

が成立するから、

$$\left| \frac{z - c}{cz + 1} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z - c| = |cz + 1|$$

$$\Leftrightarrow (z - c)(\bar{z} - \bar{c}) = (cz + 1)(\bar{c}\bar{z} + 1)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + c\bar{c} = c\bar{c}z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + 1$$

$$\Leftrightarrow (|c|^2 - 1)|z|^2 + (c + \bar{c})(z + \bar{z}) - (|c|^2 - 1) = 0$$

ここで z は虚軸上の点であり、

$$z + \bar{z} = 0$$

が成立するので、

$$(|c|^2 - 1)|z|^2 - (|c|^2 - 1) = 0$$

$$(|c|^2 - 1)(|z|^2 - 1) = 0$$

これが $z = ki$ (k は任意の実数) で成立するための条件は、

$$|c|^2 - 1 = 0$$

より、

$$|c| = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。最後に(ウ)について、

$$w = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - c}{cz + 1} = -1$$

$$\Leftrightarrow (c + 1)z = c - 1 \quad \cdots \textcircled{3} \quad (c \text{ は純虚数でないから } c \neq \pm i \text{ より})$$

よって、条件(ウ)は、③を満たす複素数 $z (= ki$ の形のもので、 k は実数) が

存在しないことと同値である。

ここで $c + 1 \neq 0$ とすると、

$$z = \frac{c - 1}{c + 1} \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= \frac{c - 1}{c + 1} + \overline{\left(\frac{c - 1}{c + 1} \right)} \\ &= \frac{c - 1}{c + 1} + \frac{\bar{c} - 1}{\bar{c} + 1} \\ &= \frac{(c - 1)(\bar{c} + 1) + (\bar{c} - 1)(c + 1)}{(c + 1)(\bar{c} + 1)} \\ &= \frac{c\bar{c} + c - \bar{c} - 1 + (c\bar{c} + \bar{c} - c - 1)}{|c + 1|^2} \\ &= \frac{2c\bar{c} - 2}{|c + 1|^2} \\ &= \frac{2(|c|^2 - 1)}{|c + 1|^2} \\ &= 0 \quad (\textcircled{2} \text{ より}) \end{aligned}$$

となり、④の z は虚軸上に存在し、条件(ウ)に矛盾する。

したがって $c + 1 = 0$ であるから、

$$c = -1$$

このとき $b = 1$ である。以上より、

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1 \quad \cdots \text{答}$$

次に、

$$w = \frac{z + 1}{-z + 1} \quad \cdots \textcircled{4}$$

による虚軸上の点 z の像 C を考える。

$$z = ki \quad (k \text{ は実数})$$

とすると④から、

$$\begin{aligned} w &= \frac{ki + 1}{-ki + 1} \\ &= \frac{ki + 1}{-ki + 1} \cdot \frac{ki + 1}{ki + 1} \\ &= \frac{1 - k^2}{1 + k^2} + \frac{2k}{1 + k^2}i \end{aligned}$$

である。ここで $k = \tan \frac{x}{2}$ を考えると、任意の実数 k に対して

$-\pi < x < \pi$ なる実数 x が 1 対 1 で対応する。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \cos x \\ \frac{2k}{1 + k^2} &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \sin x \end{aligned}$$

だから、

$$w = \cos x + i \sin x \quad (-\pi < x < \pi)$$

となり、

$$|w| = 1 \quad \text{かつ} \quad w \neq -1$$

を満たす。したがって、点 w の軌跡 C は

図のような単位円になる。(点 -1 は除く)

