

数 学 問 題

(注 意)

1. 問題は5ページまであります。
2. 問題〔Ⅰ〕,〔Ⅱ〕については答を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
3. 問題〔Ⅲ〕は解答用紙のおもてに,問題〔Ⅳ〕は解答用紙の裏に解答しなさい。
4. 科,氏名を解答用紙の所定の場所に記入しなさい。解答用紙にはあなたの受験番号が印刷されています。受験番号が正しいかどうか,受験票で照合確認しなさい。
5. 解答用紙は必ず提出しなさい。
6. 試験時間は90分です。
7. マークシート解答方法の注意
 - (1) 筆記用具はHBの黒鉛筆のみを使用すること。
 - (2) 問題に指定された数より多くマークしないこと。
 - (3) 訂正は消しゴムできれいに消し,消しくずを残さないこと。
 - (4) 解答用紙は絶対に汚したり,折り曲げたりしないこと。また,所定以外のところには絶対に記入しないこと。

〔Ⅰ〕 次の(1)～(6)の各問について、正しい答を解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2ax - \sqrt{1 - 4ax}}{x^2}$ を求めよ。ただし a は正の定数。

解答群

- | | | | |
|----------|-----------|--------------|-------------|
| 1. 0 | 2. a | 3. $2a$ | 4. $1 - a$ |
| 5. a^2 | 6. $2a^2$ | 7. $1 - a^2$ | 8. ∞ |

(2) $f(x) = \log \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)$ のとき $f'(1)$ を求めよ。ただし $\log$ は自然対数。

解答群

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 1. $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ | 2. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$ | 3. $\frac{1}{2(2 + \sqrt{2})}$ | 4. $\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$ |
| 5. $\sqrt{2} - 1$ | 6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 7. $\sqrt{2}$ | 8. $1 + \sqrt{2}$ |

(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\log n \log (n+1)}$ を求めよ。ただし $\log$ は自然対数。

解答群

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1. $\log \frac{1}{2}$ | 2. $\log \frac{3}{2}$ | 3. $\frac{\log 2}{\log 3}$ | 4. $\log 2$ |
| 5. $\log 2 \log 3$ | 6. $\frac{1}{\log 3}$ | 7. 1 | 8. $\frac{1}{\log 2}$ |

(4) $2 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ における最小値を求めよ。

解答群

- | | | | |
|-------------------|------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $-\sqrt{2}$ | 2. -1 | 3. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 4. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| 5. $-\frac{1}{2}$ | 6. $\frac{1}{2}$ | 7. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 8. $\sqrt{2}$ |

(5) $2\cos^3\theta - 3\cos\theta$ の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ における最大値を求めよ。

解答群

- | | | | |
|-------------------|------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $-\sqrt{2}$ | 2. -1 | 3. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 4. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| 5. $-\frac{1}{2}$ | 6. $\frac{1}{2}$ | 7. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 8. $\sqrt{2}$ |

(6) 3人でジャンケンをする。それぞれの人がグー、チョキ、パーを等しい確率で出すものとする。1回のジャンケンであいこになる確率を求めよ。ただし、あいこになるとは、1人だけが勝つこともなく、1人だけが負けることもないことをいう。

解答群

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1. $\frac{1}{9}$ | 2. $\frac{1}{6}$ | 3. $\frac{2}{9}$ | 4. $\frac{1}{3}$ |
| 5. $\frac{4}{9}$ | 6. $\frac{5}{9}$ | 7. $\frac{2}{3}$ | 8. $\frac{5}{6}$ |

〔Ⅱ〕 下の文の空欄に該当するものを解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

4つの平面

$$\alpha_1: x = 0, \quad \alpha_2: y = 0,$$

$$\alpha_3: z = 0, \quad \alpha_4: ax + by + cz = 1$$

(ただし、 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$)により囲まれる立体 S を考える(境界は S に含める)。このとき点 $X(x, y, z)$ が S に含まれる必要十分条件は (ア) である。 S 内の点で各平面 α_1 , α_2 , α_3 , α_4 から等距離にあるものを求めるため次のように考察する。 S 内の点で3平面 α_1 , α_2 , α_3 から等距離にあるものは直線 (イ) の上にある。この直線を l とすれば、 S 内にありかつ l 上にもある点 $P(x_0, y_0, z_0)$ と α_2 との距離は (ウ) である。これを h_1 とおこう。一方、 P と α_4 との距離を h_2 とすれば、 $h_2 =$ (エ) である。それゆえ P が4平面 α_1 , α_2 , α_3 , α_4 から等距離にあるならば、 P は l 上かつ $h_1 = h_2$ したがって $x_0 =$ (オ) となる。

解答群(ア)

1. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, ax + by + cz \geq 1$
2. $x > 0, y > 0, z > 0, ax + by + cz > 1$
3. $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0, ax + by + cz \geq 1$
4. $x < 0, y < 0, z < 0, ax + by + cz > 1$
5. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, ax + by + cz \leq 1$
6. $x > 0, y > 0, z > 0, ax + by + cz < 1$
7. $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0, ax + by + cz \leq 1$
8. $x < 0, y < 0, z < 0, ax + by + cz < 1$

解答群(イ)

1. $x = y = z$
2. $x = -y = z$
3. $x = y = -z$
4. $x = -y = -z$
5. $ax + by + cz = 1, x = y$
6. $ax + by + cz = 1, y = z$
7. $ax + by + cz = 1, x = z$
8. $ax + by + cz = 1, x + y + z = 1$

解答群(ウ)

1. $-x_0$
2. x_0
3. $\frac{1 - ax_0}{b + c}$
4. $\frac{1 - by_0}{a + c}$
5. $\frac{1 - cz_0}{a + b}$
6. $\frac{1 - (b + c)x_0}{a}$
7. $\frac{1 - (a + c)y_0}{b}$
8. $\frac{1 - (a + b)z_0}{c}$

解答群(エ)

1. $\frac{ax_0 + by_0 + cz_0}{a^2 + b^2 + c^2}$
2. $\frac{ax_0 + by_0 + cz_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
3. $\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + 1}{a^2 + b^2 + c^2}$
4. $\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
5. $\frac{1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2}$
6. $\frac{1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
7. $\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - 1}{a^2 + b^2 + c^2}$
8. $\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

解答群(オ)

$$1. \frac{1}{a+b+c}$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$3. \frac{1}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}$$

$$4. \frac{1}{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)}$$

$$5. \frac{1}{a+b+c-(a^2+b^2+c^2)}$$

$$6. \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+a+b+c}$$

$$7. \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-(a+b+c)}$$

$$8. \frac{1}{a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

〔Ⅲ〕 xy 平面上の動点 P と原点 O との距離を r ，動径 OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とするとき

$$r = \frac{1}{1 - e \cos \theta}$$

が成り立つとする。ただし e は $0 < e < 1$ を満たす定数であり， θ は $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲を動く。このときの P の軌跡を C_e とし、次の問に答えよ。

- (1) C_e と x 軸の交点および C_e と y 軸の交点を求めよ。
- (2) 点 $A(4, 0)$ を通り傾きが -1 である直線を l とする。 C_e が l と共通点をもつような e の値の範囲を求めよ。

〔Ⅳ〕 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。 $x^2 - 3y^2 = 1$ ならば $x_1^2 - 3y_1^2 = 1$ であることを示せ。

- (2) 等式 $x^2 - 3y^2 = 1$ を満たす正の整数 x, y に対して $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば $y > y_1 \geq 0$ が成り立つことを示せ。

- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$ によって定めると、等式

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

- (4) 等式 $x^2 - 3y^2 = 1$ を満たす正の整数の組 (x, y) は(3)で与えられた整数の組 (a_n, b_n) $(n = 1, 2, \dots)$ のどれかに等しいことを証明せよ。