

数 学 問 題

注 意

1. 問題は 11 ページまであります。
2. 問題〔Ⅰ〕については答を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
3. 問題〔Ⅱ〕は解答用紙のおもてに、問題〔Ⅲ〕は解答用紙の裏に解答しなさい。
4. 問題〔Ⅳ〕は A, B 2 題が出題されています。このうち 1 題を選択して解答しなさい。2 題とも解答した場合は、両方無効となります。選択した問題を解答用紙の問題記号選択欄にマークしなさい。解答は所定の欄にマークしなさい。
5. 氏名を解答用紙の所定の場所に記入しなさい。解答用紙にはあなたの受験番号が印刷されています。受験番号が正しいかどうか、受験票と照合確認しなさい。
6. 解答用紙は必ず提出しなさい。
7. 試験時間は 90 分です。
8. マークシート解答方法の注意
 - (1) 筆記用具は H B の黒鉛筆のみを使用すること。
 - (2) 1 問につき 2 つ以上マークしないこと。2 つ以上マークした場合には、その解答は無効になります。
 - (3) 訂正は消しゴムできれいに消し、消しくずを残さないこと。
 - (4) 解答用紙は絶対に汚したり、折り曲げたりしないこと。また、所定以外のところには絶対に記入しないこと。

※ この問題用紙は必ず持ち帰ること。

〔Ⅰ〕 次の(1)～(3)の各問の空欄に該当するものを解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

(1) x, y ($0 < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$)の間に

$$\tan y = k \tan x$$

という関係がある。ただし、 k は $k \neq -1$ なる定数である。このときつねに

$$\sin(x - y) = \boxed{\text{ア}} \sin(x + y)$$

が成り立つ。

アの解答群

- ① $\frac{k-1}{k+1}$ ② $\frac{1-k}{1+k}$ ③ $\frac{1}{k+1}$ ④ $\frac{-1}{k+1}$
 ⑤ $(k-1)$ ⑥ $(1-k)$ ⑦ k ⑧ $-k$

(2) X は 2×2 行列で、逆行列 X^{-1} をもち、関係式

$$X + X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとする。このとき

$$X^2 + (X^{-1})^2 = \boxed{\text{イ}}, \quad X^4 + (X^{-1})^4 = \boxed{\text{ウ}}$$

である。

イの解答群

- ① $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$
 ⑤ $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ ⑦ $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 23 \end{pmatrix}$ ⑧ $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$

ウの解答群

- ① $\begin{pmatrix} 125 & 250 \\ 375 & 500 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 135 & 270 \\ 405 & 540 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 173 & 250 \\ 375 & 548 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 175 & 250 \\ 375 & 550 \end{pmatrix}$
- ⑤ $\begin{pmatrix} 171 & 250 \\ 375 & 546 \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} 199 & 290 \\ 435 & 634 \end{pmatrix}$ ⑦ $\begin{pmatrix} 193 & 290 \\ 435 & 628 \end{pmatrix}$ ⑧ $\begin{pmatrix} 201 & 290 \\ 435 & 636 \end{pmatrix}$

- (3) 数直線上に n 個の点 $1, 2, \dots, n$ をとる(ただし, $n \geq 2$ とする)。これらの点からでたらめに 1 点を選ぶ試行を独立に 2 回行う。えられた 2 点を端点とする線分の長さが 1 である確率は エ である。また、えられた 2 点を端点とする線分の長さの期待値は オ である。ただし、えられた 2 点が同一の場合は線分の長さは 0 であるとする。

エの解答群

- ① $\frac{1}{n}$ ② $\frac{2}{n}$ ③ $\frac{1}{2n}$ ④ $\frac{1}{n-1}$
- ⑤ $\frac{1}{2(n-1)}$ ⑥ $\frac{n-1}{n^2}$ ⑦ $\frac{2(n-1)}{n^2}$ ⑧ $\frac{n-1}{2n^2}$

オの解答群

- ① $\frac{n-1}{2}$ ② $\frac{n}{3}$ ③ $\frac{n^2-1}{2n}$ ④ $\frac{n^2+1}{2n}$
- ⑤ $\frac{n^2-1}{3n}$ ⑥ $\frac{n^2+1}{3n}$ ⑦ $\frac{n^2-1}{6n}$ ⑧ $\frac{n^2+1}{6n}$

〔Ⅱ〕 曲線 $y = x^3$ 上の点 (x, x^3) と点 $(0, a)$ (a は正の定数) との距離を $L(x)$ とおく。

(1) ある数 a_1 を境に, $a \leq a_1$ ならば $L(x)$ が極値をとる x は 1 個, $a > a_1$ ならば 3 個となることを示せ。

(2) $a > a_1$ のとき $L(x)$ が極値をとる x を α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$) とする。
 $L(\alpha) = L(\gamma)$ となる a の値を求めよ。

〔Ⅲ〕 (1) 積分 $\int_0^1 e^t \cos 2\pi t \, dt$ を求めよ。

(2) a を実数の定数として積分

$$I = \int_0^1 (e^t - a \cos 2\pi t)^2 dt$$

を求めよ。

(3) I を最小とする a の値を求めよ。

〔Ⅳ〕 次の問題 A, B のいずれか 1 題のみを選択して解答せよ。2 題とも解答した場合は、両方無効になる。選択した問題の問題記号選択欄をマークせよ。解答は所定の欄にマークせよ。

〔A〕 下の文のア～カの空欄に該当するものを解答群から 1 つ選び、解答用紙の所定の欄にマークせよ。

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n = 1, 2, \dots$) によって定義される数列 $\{a_n\}$ について調べる。二項定理によって右辺を展開すると

$$a_n = \boxed{\text{ア}}.$$

右辺の第 $k + 1$ 項の分母分子を n^k で割る。各項についてその操作を行うと

$$a_n = \boxed{\text{イ}} \dots\dots(1)$$

となる。 n のかわりに $n + 1$ を考えると

$$a_{n+1} = \boxed{\text{ウ}} \dots\dots(2)$$

がえられる。(1)の右辺の最初の項を B_0 , 第 2 項を B_1 , $\dots$, 最後の項を B_n とおき, (2)の右辺の最初の項を C_0 , 第 2 項を C_1 , $\dots$, 最後の項を C_{n+1} とおくと, B_k と C_k の間の大小関係は

$$\boxed{\text{エ}} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

となる。 C_{n+1} は正であるから, 結局, $a_1, a_2, \dots$ の大小関係は

$$\boxed{\text{オ}}$$

となる。さらに $B_k < \frac{1}{k!}$ ($k = 2, 3, \dots, n$) が成り立つので

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \boxed{\text{カ}} < 3$$

であることもわかる。

アの解答群

$$\textcircled{1} \quad 1 + \frac{1!n}{n} + \frac{2!(n-1)}{n^2} + \frac{3!(n-2)}{n^3} + \dots + \frac{n!\{n-(n-1)\}}{n^n}$$

$$\textcircled{2} \quad 1 + \frac{n}{n} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-2}{n^3} + \dots + \frac{n-(n-1)}{n^n}$$

$$\textcircled{3} \quad 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots\{n-(n-1)\}}{n!} \frac{1}{n^n}$$

$$\textcircled{4} \quad 1 + \frac{1}{n} \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n-2} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n}{n-(n-1)} \frac{1}{n^n}$$

$$\textcircled{5} \quad 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{n-2}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n-(n-1)}{n} \frac{1}{n^n}$$

$$\textcircled{6} \quad 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n-2}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n-(n-1)}{n!} \frac{1}{n^n}$$

イの解答群

$$\textcircled{1} \quad 1 + 1 + \frac{2!}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{3!}{n^2} \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{n!}{n^{n-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\textcircled{2} \quad 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{1 - \frac{1}{n}} \frac{1}{n^3} + \frac{3}{1 - \frac{2}{n}} \frac{1}{n^4} + \dots + \frac{n}{1 - \frac{n-1}{n}} \frac{1}{n^{n+1}}$$

$$\textcircled{3} \quad 1 + 1 + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^{n-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\textcircled{4} \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\textcircled{5} \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!n^2} \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!n^{n-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\textcircled{6} \quad 1 + 1 + \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3n^2} \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n \cdot n^{n-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

ウの解答群

$$\textcircled{1} \quad 1 + 1 + \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n+1)^{n-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\textcircled{2} \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\textcircled{3} \quad 1 + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{1 - \frac{1}{n+1}} \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{3}{1 - \frac{2}{n+1}} \frac{1}{(n+1)^4} + \dots$$

$$\dots + \frac{n}{1 - \frac{n-1}{n+1}} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \frac{n+1}{1 - \frac{n}{n+1}} \frac{1}{(n+1)^{n+2}}$$

$$\textcircled{4} \quad 1 + 1 + \frac{1}{2(n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3(n+1)^2} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n(n+1)^{n-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+1)^n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\textcircled{5} \quad 1 + 1 + \frac{1}{2!(n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!(n+1)^2} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!(n+1)^{n-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!(n+1)^n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\textcircled{6} \quad 1 + 1 + \frac{2!}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{3!}{(n+1)^2} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{n!}{(n+1)^{n-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{(n+1)!}{(n+1)^n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

エの解答群

- ① $B_0 = C_0, B_1 = C_1, B_2 > C_2, B_3 < C_3, B_4 > C_4, \dots,$
 $(-1)^n B_n > (-1)^n C_n$
- ② $B_0 = C_0, B_1 = C_1, B_2 > C_2, B_3 > C_3, B_4 > C_4, \dots, B_n > C_n$
- ③ $B_0 = C_0, B_1 > C_1, B_2 > C_2, B_3 > C_3, B_4 > C_4, \dots, B_n > C_n$
- ④ $B_0 = C_0, B_1 = C_1, B_2 = C_2, B_3 = C_3, B_4 = C_4, \dots, B_n = C_n$
- ⑤ $B_0 = C_0, B_1 = C_1, B_2 < C_2, B_3 > C_3, B_4 < C_4, \dots,$
 $(-1)^n B_n < (-1)^n C_n$
- ⑥ $B_0 = C_0, B_1 = C_1, B_2 < C_2, B_3 < C_3, B_4 < C_4, \dots, B_n < C_n$

オの解答群

- ① $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$
- ② $a_1 = a_2 > a_3 > a_4 > \dots$
- ③ $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$
- ④ $a_1 = a_2 < a_3 < a_4 < \dots$
- ⑤ $a_1 < a_2, a_2 > a_3, a_3 < a_4, \dots$
- ⑥ $a_1 > a_2, a_2 < a_3, a_3 > a_4, \dots$

カの解答群

- ① $3 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ② $3 - \frac{1}{2^n}$ ③ $3 - \frac{1}{2^{n+1}}$
- ④ $2 + \frac{1}{2^{n-1}}$ ⑤ $2 + \frac{1}{2^n}$ ⑥ $2 + \frac{1}{2^{n+1}}$

〔B〕 次の(1)～(5)の各問について、正しい答を解答群から1つ選び、解答用紙の所定の欄の番号をマークせよ。

入力した数 N (正の整数) の約数の一覧表を出力し、さらに約数の個数とその総和も求めるプログラムを作成したい。たとえば、 N として 12 を入力したときに次のような出力が得られるようにしたい。

1

2

3

4

6

12

コスウ 6

ソウワ 28

このためのプログラムを2種類作成した(プログラム1および2)。なお、約数には1も含むし、その数自身も含む。プログラム中の MOD は、整数の割り算における余りを意味する($N \text{ MOD } J$ は、 N を J で割った余り)。

プログラム1は、正の整数で N を順次割ってみて、余りが0になるかどうかを調べるものである。0になれば約数と判定する。

〔プログラム1〕

100 INPUT N

110 T = 0

120 S = 0

130 FOR J = 1 TO N

140 IF (N MOD J) <> 0 THEN GOTO 180

150 PRINT J

160 T = T + 1

170 S = S + J

180 NEXT J

190 PRINT "コスウ"; T

200 PRINT "ソウワ"; S

210 END

```

290 FOR J = 1 TO K
300   PRINT 
310 NEXT J
320 PRINT "コスウ"; T
330 PRINT "ソウワ"; S
340 END

```

- (3) $N=100$ のとき、番号 170 の行における余りの計算は、何回行われるか。

解答群

- ① 1回 ② 5回 ③ 10回 ④ 20回
 ⑤ 33回 ⑥ 50回 ⑦ 100回 ⑧ 10000回

- (4) 番号 220 の行から番号 270 の行へとぶのは、どんな場合か。

解答群

- ① $J=1$ の場合 ② $J < \sqrt{N}$ の場合
 ③ $J^2 < N < (J+1)^2$ の場合 ④ $J = \sqrt{N}$ の場合
 ⑤ $J=N$ の場合 ⑥ J が素数である場合
 ⑦ J が N の約数でない場合 ⑧ J が整数の 2 乗である場合

- (5) 約数のうちおよそ半分は番号 180 の行で出力されるが、残りの半分は番号 300 の行で出力される。小さい値から順に(プログラム 1 と同じ順序で)出力するにはどうしたらよいか。番号 300 の行の空欄にあてはまるものを選び。

解答群

- ① $A(J)$ ② $A(J+1)$ ③ $A(2 * J)$
 ④ $A(K-J)$ ⑤ $A(K+1-J)$ ⑥ $A(K+J)$
 ⑦ $A(N / J)$ ⑧ $N / A(J)$